

Análisis

Taller 7

Series.

Fecha de entrega: 13 de Marzo 2014

1. ¿Convergen las siguientes series? Pruebe sus respuestas.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ donde $a \in \mathbb{R}$,

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, donde $b_{2m} := \frac{1}{(2m)^2}$, $b_{2m+1} = -\frac{1}{2m}$.

2. (a) Para $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ y $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge.

(b) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión monótonicamente decreciente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en \mathbb{R} . Muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0.$$

3. (a) Para una sucesión decreciente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ muestre

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \text{ converges} \iff \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n} \text{ converges.}$$

(b) Determine si las series $\sum_{n=2}^{\infty} (n \log_2 n)^{-1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ convergen. Pruebe! (Utilice sus conocimientos aprendidos en los cursos de cálculo sobre la función logaritmo.)

4. ¿Donde son las siguientes funciones continuas? Pruebe su respuesta.

(a) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$,

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto |z + \bar{z}^2|$,

(c) $h : [-1, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x = 2. \end{cases}$

(d) $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$