

Análisis

Taller 6

lim sup; el número de Euler.

Fecha de entrega: 6 de Marzo 2014

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Recuerde que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n &:= \inf\{x \in \mathbb{R} : x \geq x_n \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ con } x \geq x_n \text{ para } n \geq N\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &:= \sup\{x \in \mathbb{R} : x \leq x_n \text{ para casi todo } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{x \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} \text{ con } x \leq x_n \text{ para } n \geq N\}. \end{aligned}$$

1. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Muestre:

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n =$ el punto de acumulación más grande de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n =$ el punto de acumulación más pequeño de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. (a) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y defina sucesiones $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ por

$$y_k := \sup\{x_n : n \geq k\}, \quad z_k := \inf\{x_n : n \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Muestre que $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergen en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \limsup x_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \liminf x_n.$$

(b) Encuentre una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \limsup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Debe $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tener un máximo en este caso?

3. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado y sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Muestre o encuentre un contraejemplo:

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- (b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. **El número de Euler e.** Para $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

- (a) Muestre que las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergen.
- (b) Muestre que $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.