Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 5

Sucesiones.

Fecha de entrega: 27 de Febrero 2014

---

1. Sea V un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ sucesiones convergentes. Suponga que $a := \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \neq 0$. Muestre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} x_n.$$

2. Demuestre que $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$.

3. Sean $I_n = [a_n, b_n]$ intervalos en $\mathbb{R}$ con $I_{n+1} \subseteq I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Muestre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$.

4. Muestre que en $\mathbb{R}$ (un campo ordenado que es extensión del campo ordenado $\mathbb{Q}$), lo siguente es equivalente.
   (a) Cada sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge (es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo).
   (b) $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la minima cota superior.
   (c) $\mathbb{R}$ satisface la propiedad del ejercicio 3.