Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 4

Sucesiones.

Fecha de entrega: 20 de Febrero 2014

---

1. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[n]{q},\ y_n := \sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Si es así, encuentre el límite.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:

   (I) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal que
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$
   luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (II) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal que
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq N,$$
   luego $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. La sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por
   $$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
   Sean $\sigma < \tau$ las soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$ y
   $$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en $\mathbb{R}$.
   (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} x_n = \tau$.

4. Si existe, encuentre el valor de
   $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}},$$
   es decir, el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde
   $$x_1 := 1 \quad \text{and} \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n},\ n \geq 1.$$