

Análisis

Taller 3

Números complejos; espacios métricos.

Fecha de entrega: 13 de Febrero 2014

- (a) Muestre que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen exactamente dos números $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = z$.
(b) Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Muestre que existe por lo menos un $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$az^2 + bz + c = 0.$$

- Sea (X, d) , $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y $M \subseteq X$. Muestre que lo siguiente es equivalente:
 - M es acotado.
 - $\exists x \in X \exists r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.
 - $\forall x \in X \exists r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.

- (a) Sea (X, d) , $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X . Muestre: Si existe $a \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

¿Se tiene el otro sentido (prueba o contraejemplo)?

- (b) Sea (X, d) un espacio métrico y $\varrho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una biyección. Muestre: Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge, luego $(x_{\varrho(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ converge y tiene el mismo límite.
¿Se tiene el otro sentido, es decir, si todo reordenamiento de una sucesión converge, la sucesión misma converge?
- (a) Sea $x_n = \sqrt{1 + n^{-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} .
(b) Convergen los siguientes sucesiones en \mathbb{R} ? En el caso de convergencia, halle el límite. Pruebe!

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$,

- $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $b_n = \sqrt{1 + n^{-1} + n^{-2}}$, $n \in \mathbb{N}$,

- $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde $d_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$, $n \in \mathbb{N}$,