Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Monotonía y ocntinuidad.

---

1. Defina la función

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ con } \operatorname{gcd}(p,q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   (a) Determine todos los puntos donde f es continua.

   (b) ¿Es f Riemann-integrable? Si lo es, calcule $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Muestre que existe una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que no existe ningún subinterval $D \subseteq [0,1]$ tal que $f|_D$ es monóntona.

3. Muestre que existe una función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ que es continua pero en ningún lado derivable.

   Note. Otro ejemplo de tal función es la función de Weierstraß.

Ayuda Problema 2.
Usa los siguientes pasos:

(i) Para un intervalo $D \subseteq [0,1]$ defina

$$A(D) := \{f \in C[0,1] \,:\, f \text{ creciente en } D\},$$
$$B(D) := \{f \in C[0,1] \,:\, f \text{ decreciente en } D\}$$

Muestre que $A(D)$ y $B(D)$ son cerrados en $(C[0,1], \|\cdot\|)$ y que tienen interior vacío.

(ii) Define intervalos

$$D_1 := [0, \tfrac{1}{2}],\ D_2 := [\tfrac{1}{2}, 1],$$
$$D_3 := [0, \tfrac{1}{3}],\ D_4 := [\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3}],\ D_5 := [\tfrac{2}{3},\ 1],$$
$$\ldots$$

Usa el teorema de Baire para mostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(A(D_n) \cup B(D_n)\Big) \neq C[0,1]$.

Un ejemplo explicito de una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es derivable y no monotonica en ningún lugar está dada en Katznelson, Stromberg: *Everywhere differentiable, nowhere monotone, functions*, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 349-354.

Ayuda Problema 3. Usa los siguientes pasos:

(i) Muestre que $X := \Big\{ f \in C[0,1] \,:\, f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f([0,1]) \subseteq [0,1] \Big\}$ es cerrado en $C([0,1], \|\cdot\|)$. Entonces X es completo.

(ii) Defina $T : X \to X$ por

$$Tf(x) := \begin{cases} \frac{3}{4} f(3x), & 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f(2 - 3x), & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} f(3x - 2), & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$

Muestre que T está bien definido es que es Lipschitz continuo con Lipschitz constante $\frac{3}{4}$.

(iii) Usa el teorema del punto fijo de Banach para mostrar que existe $g \in X$ con $Tg = g$. Obviamente, g es continua.

(iv) Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{k-1}{3^{n+1}} < \frac{k}{3^{n+1}} \le \frac{1}{3}, \qquad & k \in \{1, 2, \ldots, 3^n\}, \\ \frac{1}{3} \le \frac{k-1}{3^{n+1}} < \frac{k}{3^{n+1}} \le \frac{2}{3}, \qquad & k \in \{3^n + 1, 2 \cdot 3^n + 3, \ldots, 2 \cdot 3^n\}, \\ \frac{2}{3} \le \frac{k-1}{3^{n+1}} < \frac{k}{3^{n+1}} \le 1, \qquad & k \in \{2 \cdot 3^n + 1, 2 \cdot 3^n + 3, \ldots, 3 \cdot 3^n\} \end{aligned}$$

y que

$$|g(\frac{k-1}{3^n}) - g(\frac{k}{3^n})| \ge 2^{-n}.$$

(v) Fije $y \in [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \{1, \ldots, 3^n\}$ tal que $s_n \le a \le t_n$ donde $s_n := \frac{k-1}{3^n}$, $t_n := \frac{k}{3^n}$. Muestre que

$$|g(s_n) - g(y)| + |g(t_n) - g(y)| \ge 2^{-n}.$$

(vi) Defina $r_n \in \{s_n,\ t_n\}$ tal que

$$|g(r_n) - g(y)| = \max\{|g(s_n) - g(y)|,\ |g(t_n) - g(y)|\}$$

y muestre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(r_n) - g(y)}{r_n - a} = \infty.$$

Note. Otro ejemplo de tal función es la función de Weierstraß.

Teorema [Baire]. Sea X un espacio métrico completo y sean $A_n \subseteq X$ subconjuntos cerrados tal que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Luego existe por lo menos un $n \in \mathbb{N}$ tal que A_n contiene una bola abierta.

Teorema [Banach fixed point theorem]. Sea X un espacio métrico completo y $T : X \to X$ un contracción, es decir, existe un a constante $c \in [0,1)$ con

$$d(T(x), T(y)) \le c d(x,y), \qquad x, y \in X.$$

Entonces existe exactamente un $p \in X$ tal que $Tp = p$.