Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 13

Series de Taylor; topología.

Fecha de entrega: 12 de Mayo 2011

---

1. Sea $D \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $p \in D$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $f \in C^n(D, \mathbb{C})$. Sea P un polinomio de grado $\leq n$ tal que

$$P^{[k]}(p) = f^{[k]}(p), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

   Muestre que $P = j_p^n f$ donde $j_p^n f$ es el polinomio n-ésimo de Taylor de f en p.

2. Si $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\lim_{t \to 0} \int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 + x^2} f(x) \, \mathrm{d}x = \pi f(0).$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico y defina $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{P}X$ por

$$U \in \mathcal{O} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall p \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(p) \subseteq U.$$

   Muestre que $(X, \mathcal{O})$ es un espacio topológico con la propiedad de Hausdorff.

   Muestre que para $r > 0$ y $a \in X$ la bola abierta $B_r(a)$ es abierta y que la bola cerrada $K_r(a)$ es cerrada.

   Sea $S_r(a) := \{x \in X : d(x, a) = r\}$. Muestre que

$$\partial B_r(a) \subseteq S_r(a) \quad \text{and} \quad \overline{B_r(a)} \subseteq K_r(a). \tag{$*$}$$

   ¿Se tiene igualdad en $(*)$?

4. (a) Encuentre el interior y la clausura de

$$M := \{(x, \sin x^{-1}) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

   (b) Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico y $M \subseteq X$. ¿Se sigue que $(\partial M)^\circ = \emptyset$?