Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 13

Series de potencias; series de Taylor. Fecha de entrega: 5 de Mayo 2011

---

1. Para $n \in \mathbb{N}$ defina
$$f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 2n(\sqrt[n]{2x} - 1).$$
   (a) Halle el límite puntual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en cada subintervalo compacto de $(0,\infty)$.
   (c) ¿Converge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformemente en $(0,\infty)$?

   Hint. Expresa f_n como integral.

2. (a) Usa series de potencias para evaluar
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$
   (b) Encuentre la representación de series de potencias de arctan at 0 y muestre que
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots$$

3. (a) Sea $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\log(\cos x)$. Muestre que
$$\left| f(x) - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}\,|x|^3, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

4. Muestre que las siguientes funciones son infinitamente derivable y encuentre sus series de Taylor centradas en 0. Halle los radios de convergencia y determine donde las funciones son iguales a sus series de Taylor.

   (a) $$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   (b) $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{2^n}.$$