Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 11

Diferenciación; teorema de Darboux; regla de l'Hôpital. Fecha de entrega: 14 de Abril 2011

---

1. (a) *Darboux's Theorem.* Sea $\mathcal{D} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Muestre que para cada $q \in \mathbb{R}$ con

$$\inf\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\} \; < \; q \; < \; \sup\{f'(x) : x \in \mathcal{D}\}.$$

existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = q$.

   (b) Sea $\mathcal{D} = (a, b)$ un intervalo no vacío y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con un mínimo aislado global en $x_0 \in \mathcal{D}$.
¿Existen $c, d \in (a, b)$ con $c < x_0 < d$ tales que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, x_0)$ y $f'(x) \geq 0$, si $x \in (x_0, d)$.

2. Halle todas las extremos locales y globales de

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2 \sin x}{2 - \cos^2 x}.$$

3. Halle los siguientes límites si existen:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}\Big)$, (b) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{a}\Big)^a$ con $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \arctan x)^{1/x}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \Big(\frac{a}{1 - x^a} - \frac{b}{1 - x^b}\Big)$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ diferenciable, $f(0) = 1$ y $f'(x)f(x) \geq 0$ para todos $x \in [0, \infty)$. Muestre que f es creciente.