Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 10

Diferenciación; funciones exponenciales. Fecha de entrega: 7 de Abril 2011

---

1. Muestre que las siguientes funciones son diferenciables y encuentre sus derivadas. ¡Prueba!

   (a) $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x},$

   (b) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$

   $$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

2. Para $k \in \mathbb{N}$ defina $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

   $$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   Para cuáles k es f_k diferenciable? Para cuales k es f_k continuamente diferenciable?

3. Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ continua y diferenciable en (a,b) con $f'(x) \neq 1$, $x \in (a,b)$. Muestre que existe exactamente un $p \in [a,b]$ con $f(p) = p$.

4. **Exponential functions.** Para $a \in \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ fijo se define la función

   $$p_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad p_a(z) = \exp(z \ln(a)).$$

   (a) Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $q \in \mathbb{Q}$ muestre

   $$p_a(q) = a^q. \tag{$*$}$$

   (b) Muestre que p_a es diferenciable y encuentre su derivada.

   Recall. Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

   $$a^n := \prod_{n=1}^{n} a, \qquad a^0 := 1, \qquad a^{\frac{1}{n}} := \text{unique positive solution of } x^n = a.$$

   Entonces $a^q := \big((a^\sigma)^{\frac{1}{m}}\big)^n$ está definida para todos $q = \frac{\sigma n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \{\pm 1\}$.

   Remark. Dada la identidad $(*)$ se define

   $$a^z := \exp(z \ln(a)), \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ z \in \mathbb{C}.$$