Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 8

Continuidad y continuidad uniforme. Fecha de entrega: 24 de Marzo 2011

---

1. Pruebe Teoremas 5.26 y Theorem 5.27:

   Sea $I = (a, b)$ un intervalo no-vacío en los reales y $f : I \to \mathbb{R}$ una función.

   (a) Suponga que f es continua. Entonses f es inyectiva si y sólo si f es estrictamente monótona.

   (b) Si f es estrictamente monotonicamente creciente o decreciente, luego es invertible y su inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ es continua.

2. Muestre que $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$, es uniformamente continua pero no es Lipschitz continua.

3. ¿Convergen las siguientes sucesiones puntualmente? ¿Convergen uniformemente? Si convergen, encuentre la función límite.

   (a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$

   (b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx^2},$

   (c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2},$

   (d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1 + nx}.$

4. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una sucesión que converge a 0. Define $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = a_n f(x)$, $x \in \mathcal{D}$.

   (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ g(x) = 0$.

   (b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente si y sólo si f es acotada en $\mathcal{D}$.