

Análisis

Taller 7

Continuidad.

Fecha de entrega: 17 de Marzo, 2011

1. Para $j = 1, \dots, n$ sea $(X_j, \|\cdot\|_j)$ un espacio normado sobre \mathbb{F} donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} .

(a) $(X_1 \times \dots \times X_n, \|\cdot\|)$ con

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$$

es un espacio normado sobre \mathbb{F} .

(b) Muestre que para todo $j = 1, \dots, n$ la proyección pr_j es continua donde

$$\text{pr}_j : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j.$$

(c) Sea V un espacio normado, $f_j : V \rightarrow X_j$ y

$$f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n, \quad f(v) = (f_1(v), \dots, f_n(v)).$$

Muestre que f es continua si y sólo si todas f_j son continuas.

2. Criterio de Cauchy (Theorem 5.15):

Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) espacios métricos, Y completo, $f : X \supseteq \mathcal{D} \rightarrow Y$ una función y x_0 un punto límite de \mathcal{D} . Entonces f tiene un límite en x_0 si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D_f :$$

$$(0 < d_X(x, x_0) < \delta \wedge 0 < d_X(y, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

3. Sean (X, d) un espacio métrico y $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Muestre que las siguientes funciones son continuas:

$$S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) := \min\{f(x), g(x)\},$$

$$T : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) := \max\{f(x), g(x)\}.$$

4. ¿Donde son las siguientes funciones continuas? Pruebe su respuesta.

(a) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x},$

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z + \bar{z}^2|,$

(c) $h : [-1, 1] \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x = 2. \end{cases}$

(d) $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$