Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 6

Número de Euler; series. Fecha de entrega: 10 de Marzo 2011

---

1. **El número de Euler** e.

   Para $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

   (a) Muestre que $2^k < k!$ para todo $k \geq 4$ y que

   $$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Muestre que las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen.

   (c) Muestre que

   $$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

2. Halle la representación en base 5 y en base 7 de $\frac{61}{5}$. Pruébelo!
   Es decir, encuentre N_a, $N_b \in \mathbb{Z}$ y $(a_n)_{n=-N_a}^{\infty} \subseteq \{0, 1, \ldots, 4\}$ y $(b_n)_{n=-N_b}^{\infty} \subseteq \{0, 1, \ldots, 6\}$ y tal que

   $$\frac{61}{5} = \sum_{n=-N_a}^{\infty} a_n 5^{-n} = \sum_{n=-N_b}^{\infty} b_n 7^{-n}.$$

3. ¿Convergen las siguientes series? Pruebe sus respuestas.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, donde $b_{2m} := \frac{1}{(2m)^2}$, $b_{2m+1} = -\frac{1}{2m}$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ donde $a \in \mathbb{R}$.

4. (a) Para $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ y $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge.

   (b) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión monotónicamente decreciente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en $\mathbb{R}$. Muestre que

   $$\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0.$$