Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis

Taller 5

$\limsup$; sucesiones; test de condensación de Cauchy. Fecha de entrega: 3 de Marzo 2011

---

1. (a) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y defina sucesiones $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ por

$$y_k := \sup\{x_n : n \geq k\}, \qquad z_k := \inf\{x_n : n \geq k\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Muestre que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergen en $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y que

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \limsup x_n, \qquad \lim_{k\to\infty} z_k = \liminf x_n.$$

(b) Encuentre una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \limsup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Debe $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tener un máximo en este caso?

2. Sea $\mathbb{K}$ un campo ordenado con la propiedad arquimediana. Muestre que $\mathbb{K}$ tiene la *least upper bound property* si y solo si cada sucesión de Cauchy converge.

3. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio normado y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Muestre o encuentre un contraejemplo:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\implies$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\implies$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. (a) Para una sucesión decreciente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ muestre

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ converges} \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n} \text{ converges.}$$

(b) Determine si las series $\sum_{n=2}^{\infty}(n\log_2 n)^{-1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ convergen. Prueba! (Utilice sus conocimientos aprendidos en los cursos de cálculo sobre la función logaritmo.)