

Análisis

Taller 4

Sucesiones.

Fecha de entrega: 24 de Febrero 2011

1. Sea $q \in \mathbb{R}_+$ y $x_n := \sqrt[n]{q}$, $y_n := \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Convergen las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Si es así, encuentre el límite.

2. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Muestre o encuentre un contraejemplo:

(i) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q < 1$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq N,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(ii) Si existen $N \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{R}$, $q \leq 1$ tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq N,$$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3. La sucesión de Fibonacci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sean $\sigma < \tau$ las soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$ y

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Muestre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en \mathbb{R} .

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tau$.

4. Si existe, encuentre el valor de

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

es decir, el límite de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$x_1 := 1 \quad \text{and} \quad x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 1.$$