Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis 1

Taller 3

Números complejos; espacios métricos. Fecha de entrega: 17 de Febrero 2011

---

1. (a) Muestre que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen exactamente dos números $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$ tal que $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = z$.

   (b) Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Muestre que existe por lo menos un $z \in \mathbb{C}$ tal que
   $$az^2 + bz + c = 0.$$

2. Sea (X, d), $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y $M \subseteq X$. Muestre que lo siguiente es equivalente:

   (i) M es acotado.

   (ii) $\exists\, x \in X \; \exists\, r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.

   (iii) $\forall\, x \in X \; \exists\, r > 0 : M \subseteq B_r(x)$.

3. (a) Sea (X, d), $X \neq \emptyset$, un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X. Muestre: Si existe $a \in X$ tal que
   $$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} y_n,$$
   entonces
   $$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$
   Se tiene el converso (prueba o contraejemplo)?

   (b) Sea (X, d) un espacion métrico y $\varrho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Muestre: Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge, luego $(x_{\varrho(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converge y tiene el mismo límite.
   Is the converse true, that is, if all re-orderings of a sequence converge, does the sequence itself converge?

4. (a) Sea $x_n = \sqrt{1 + n^{-1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

   (b) Convergen los siguientes sucesiones en $\mathbb{R}$? En el caso de convergencia, halle el límite. Prueba!

   (i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n = \dfrac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$,

   (ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $b_n = \sqrt{1 + n^{-1} + n^{-2}}, \quad n \in \mathbb{N}$,

   (iii) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $d_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n, \quad n \in \mathbb{N}$,