Universidad de los Andes
MATE-2201

Análisis 1 — Taller 2

Campos ordenados; sup, inf. — Fecha de entrega: 10 de Febrero 2011

---

1. Sea $(K, +, \cdot, >)$ un campo ordenado y sean a, x, x', y, $y' \in K$. Pruebe lo siguiente (vea Corolario 3.9 en las notas de clase). Justifique cada paso.

   (iii) $x < y \implies x + a < y + a$,

   (iv) $x < y \ \wedge \ x' < y' \implies x + x' < y + y'$,

   (v) $x < y \ \wedge \ a > 0 \implies a \cdot x < a \cdot y$,
   $x < y \ \wedge \ a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y$,

   (vi) $0 \le x < y \ \wedge \ 0 \le x' < y' \implies 0 \le x' \cdot x < y' \cdot y$,

   (x) $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$,

   (xi) $x > 0 \wedge y < 0 \implies xy < 0$.

2. Encuentre el ínfimo y el súpremo de los conjuntos in el campo ordenado $\mathbb{R}$. Determine si tienen máximo y/o mínimo.

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \ \ x = n^2\}$,

   (b) $\left\{\dfrac{|x|}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R}\right\}$,

   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \ \ x = \dfrac{1}{n} + n\big(1 + (-1)^n\big)\right\}$,

   (d) $\big\{x \in \mathbb{R} : x^2 \le 2\big\} \cap \mathbb{Q}$.

3. (a) Para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \le x < n + 1$ (vea Proposición 3.19).

   (b) Todo intervalo en $\mathbb{R}$ con por lo menos dos puntos diferentes contiene un número racional. (Proposición 3.20)

   (c) $\mathbb{Q}$ no tiene la *least upper bound property*.

4. (a) Sea $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ y $\xi \in \mathbb{R}$ una cota superior de X. Muestre que

   $$\xi = \sup X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \ \exists x_\varepsilon \in X \ \ \xi - \varepsilon < x_\varepsilon \le \xi.$$

   Formule la afirmación análoga para $\inf X$.

   (b) Sean $X,\ Y \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos tal que

   $$\forall\, x \in X \ \ \exists\, y \in Y \ : \ y < x.$$

   ¿Esto implica que $\inf Y < \inf X$? Pruebe su afirmacíon.