

Analysis 1

Taller 1

Conjuntos; inducción.

Fecha de entrega: 3 de Febrero 2011

1. (a) Muestre que un subconjunto de un conjunto contable es contable o finito.
(b) Muestre que la unión contable de conjuntos contables es contable.
(c) Muestre que el producto directo de conjuntos contables es contable.
(d) Muestre que \mathbb{Q} es contable.

2. (a) Muestre que el conjunto de potencias $\mathbb{P}\mathbb{N}$ no es contable.
(b) Sean A, B conjuntos. Muestre o encuentre un contraejemplo:
 - (i) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}A \cap \mathbb{P}B$.
 - (ii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}A \cup \mathbb{P}B$.

3. Muestre las siguientes fórmulas:

(a)
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Para $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{N}$ sea

$$a(m, n) := \#\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=1}^m x_j \leq n\},$$
$$b(m, n) := \#\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{j=1}^m x_j = n\}.$$

- (a) Muestre que $a(m, n) = b(m+1, n)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Muestre que $a(m, n) = \binom{n+m}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Hint: Muestre que $a(m, n-1) + a(m-1, n) = a(m, n)$ y use inducción en $n+m$.