Análisis complejo

Último taller

Fecha de entrega: 21 de noviembre de 2024

---

1. Calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$.

2. Demuestre que para toda función meromorfa $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existen funciones enteras $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que no tienen ceros en común y que $h = f/g$.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. Para todo $z \in \mathbb{C}$ denotamos con $m(z) \in \mathbb{N}_0$ la multiplicidad de z como cero de f.

   Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}$ lo siguiente es equivalente:

   (a) Existe una función holomorfa $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $g^k = f$.

   (b) Todo $m(z) \in \mathbb{N}$ es divisible por k.

4. Sea $0 \neq p \in \mathbb{C}$. Demuestre: Para cada $\varepsilon > 0$ y $c \in \mathbb{C}$ existe una función entera g tal que $g(p) = c$ y $|g(z)| < \varepsilon$ para todo $|z| \leq |p|/2$.

5. **Ejercicio adicional para código 4.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión de puntos distintos tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ y sea $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión. Encuentre una función entera f tal que $f(a_n) = w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Hint. $f = \sum f_n, \quad f_n(a_1) = \cdots = f_n(a_{n-1}) = 0.$