Universidad de los Andes, MATE-3210, MATE-4210

Análisis complejo

Taller 12

Convergencia de sucesiones de funciones.
Funciones biholomorfas.

Fecha de entrega: 07 de noviembre de 2024

1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado con clausura $\overline{U}$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $\overline{U} \to \mathbb{C}$ cuyas restricciones a U son holomorfas y suponga que la sucesión converge uniformemente en $\overline{U} \setminus U$. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\overline{U}$.

2. Sean $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $U_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
   Encuentre funciones biholomorfas
   $$f : U_1 \to \mathbb{E}, \qquad g : U_2 \to \mathbb{E}.$$

3. Encuentre una función biholomorfa $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\, \operatorname{Re}(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

4. Sea $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una función biholomorfa. Demuestre que existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{E}$ tal que
   $$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}.$$

5. **Ejercicio adicional para código 4.** ¿Existe una función homeomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{E}$?