Análisis complejo

Taller 9

Logaritmos.

Fecha de entrega: 17 de octubre de 2024

1. Sea $a > 0$. Calcule las sigientes integrales:
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Sean P, Q polinonmios con $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geq 0$ y $\deg Q \geq 2 + \deg P$ y sea $R = \frac{P}{Q}$. Exprese $\displaystyle\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x$ en términos de los residuos de $\ln(\cdot)R(\cdot)$ donde ln es un logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$.

3. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$

4. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino y sea $(f_t, U_t)_{t\in[0,1]}$ una continuación analítica a lo largo de γ. Para $t \in [0,1]$ sea $R(t)$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de f_t centrada en $\gamma(t)$. Demuestre que $R(t) = \infty$ para todo t o que $R : [0,1] \to (0,\infty)$ es continuo.

5. **Ejercicio adicional para código 4.** Sea $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un conjunto abierto y suponga que existe un camino en U con $\mathrm{ind}_\gamma(0) = 1$. Demuestre que no hay una raíz n-ésima holomorfa en U $(n \geq 2)$.