Universidad de los Andes, MATE-3210, MATE-4210

Análisis complejo

Taller 8

Teorema de Cauchy; residuos.

Fecha de entrega: 10 de octubre de 2024

1. Sea $R = \frac{P}{Q}$ con polinomios P y Q tal que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$. Muestre que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x$ existe y exprese este límite en términos de los residuos de R. No olvide formular su afirmación.

2. **Fracciones parciales de** $(\sin \pi a)^{-2}$**.**
Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea γ_n el borde del rectángulo con esquinas $n + \frac{1}{2} + \mathrm{i}n$, $-n - \frac{1}{2} + \mathrm{i}n$, $-n - \frac{1}{2} - \mathrm{i}n$, $n + \frac{1}{2} - \mathrm{i}n$. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
   (a) Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+a)^2}\,\mathrm{d}z = 0.$
   (b) Demuestre que $\displaystyle\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$

3. (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región, $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, f meromorfa en U con zeros en $z_1, \dots, z_n$ y polos en $p_1, \dots, p_k$. Sea γ una curva cerrada homotópicamente nula en U y suponga que $\gamma \cap \{z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_k\} = \emptyset$. Demuestre que
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} g(z)\, \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} g(z_j)\,\mathrm{ord}(f, z_j)\,\mathrm{ind}_{\gamma}(z_j) - \sum_{j=1}^{k} g(p_j)\,\mathrm{ord}(f, p_j)\,\mathrm{ind}_{\gamma}(p_j).$$
   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, sean $p \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tal que $\overline{B_R(p)} \subset U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y suponga que $f|_{B_R(p)}$ es inyectiva. Sea $V := \{f(z) : z \in B_R(p)\}$. Entonces $f^{-1} : V \to B_R(p)$ está bien definida. Demuestre que
$$f^{-1}(q) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_R(p)} \frac{z f'(z)}{f(z) - q}\,\mathrm{d}z, \qquad q \in V.$$

4. Sea $\gamma = \partial(B_2(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\})$. Calcule las siguientes integrales:
$$(a) \quad \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(\sin z)^2 \cos z}\,\mathrm{d}z, \qquad\qquad (b) \quad \int_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

5. **Ejercicio adicional para código 4.** Determine todos los valores que puede tomar $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ si γ es un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$.