Universidad de los Andes, MATE-3210, MATE-4210

Análisis complejo

Taller 7

Teorema de Cauchy; residuos.

Fecha de entrega: 26 de septiembre de 2024

---

1. Calcule la parte principal en 0 de las funciones

$$f(z) = \frac{(\sin z)^2}{\sin(z^2)}, \qquad g(z) = \frac{1 - z^2}{z(1 - \cos(z^2))}.$$

2. Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto finito y sea $f : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C}$ holomorfa.

   (a) Muestre que $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ es holomorfa en $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

   (b) Muestre que $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{c \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_c f$.

   (c) Calcule $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1}\, \mathrm{d}z$.

3. Calcule las siguientes integrales con métodos de análisis complejo:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13}\, \mathrm{d}x, \qquad (b) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}\, \mathrm{d}x, \qquad (c) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x.$$

4. (a) Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(z) = z^n$. Demuestre que $\operatorname{ind}_{p \circ \gamma}(0) = n \operatorname{ind}_\gamma(0)$.

   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo, $c \in U$ y γ una curva cerrada en $U \setminus \{c\}$ tal que $\operatorname{int}(\gamma) \subseteq D$. Para una función biholomorfa $f : U \to f(U)$ demuestre que

$$\operatorname{ind}_\gamma(c) = \operatorname{ind}_{f \circ \gamma}(f(c)).$$

5. **Ejercicio adicional para código 4.** Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Suponga que para todo $a \in \mathbb{C}$, por lo menos un coeficiente en la serie de Taylor de f en a se anula. Muestre que f es un polinomio.