Análisis complejo

Taller 6

Singularidades aisladas; funciones meromorfas;
serie de Laurent.

Fecha de entrega: 19 de septiembre de 2024

1. Sea P un polinomio grado n y $R > 0$ tal que $|z| < R$ para todo z con $P(z) = 0$. Defina $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = R\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$. Calcule $\displaystyle\oint_\gamma \frac{P'}{P}\,\mathrm{d}z$.

2. Determine todas las funciones biholomorfas $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   Hint. Suponga que f es una función biholomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Considere $f(1/z)$.

3. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$. Se dice que que f es *meromofa en* ∞ si la función $z \mapsto g(z) := g(1/z)$ es meromorfa en una vecindad de 0.

   (a) Demuestre que una función racional es meromorfa en $\mathbb{C}$ y en ∞.

   (b) Demuestre que una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y en ∞ es una función racional.

4. Sean $0 \le r < R$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y sea f un función holomorfa en el anillo $A = \{r < |z - z_0| < R\}$ con serie de Laurent $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Suponga que f tiene una antiderivada en A. Demuestre que $c_{-1} = 0$.