# Análisis complejo

Taller 4

El principio del máximo; principio de la identidad. Fecha de entrega: 05 de septiembre de 2024

1. Sea $f$ una función entera y sea $\xi = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/n}$ para un $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $f(\xi z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que existe una función entera $g$ tal que $f(z) = g(z^n)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

2. (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región y sea $K \subset U$ un subconjunto compacto con interior $K^\circ$ no vacío. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con $|f|$ constante en la frontera de $K$. Muestre que $f$ es constante o tiene un cero en $K^\circ$.

   (b) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$, $\varepsilon > 0$ tal que la bola cerrada $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ es un subconjunto de $U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con $|f(z_0)| < \min\{|f(z)| : |z - z_0| = \varepsilon\}$. Muestre que $f$ tiene un cero en $B_\varepsilon(z_0)$.

3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : U \to X$ una función holomorfa no constante y $N := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$. Muestre que $N$ es cerrado y discreto en $U$.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, sin puntos aislados de la fontera, y sea $M \subset U$ un conjunto sin puntos de acumulación en $U$. Muestra que cada función biholomorfa[1] $f : U \setminus M \to U \setminus M$ tiene una extensión biholomorfa $g : U \to U$.

5. **Ejercicio adicional para código 4.** Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergenc $R \in (0, \infty)$. Muestre que $f$ tiene por lo menos un punto singular[2] en la frontera del disco de convergencia.

[1] $f : U \to V$ se llama *biholomorfa* si $f$ es una biyección y tanto $f$ como $f^{-1}$ son holomorfas.

[2] Un punto $p$ en la frontera de $B_R(z_0)$ se llama *punto singular*, si no existe ninguna vecindad $U$ de $p$ y $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ para $z \in U \cap B_R(z_0)$.