Análisis complejo

Taller 3

Teorema de Cauchy y sus corolarios. Fecha de entrega: 29 de agosto de 2024, 12 m

1. (a) Calcule $\oint_{|z-1|=2} z^n \sin(z)\,\mathrm{d}z$ para $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Para $n \in \mathbb{N}_0$ demuestre que

$$\int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{1}{(z^2+\pi^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{-(2n)!}{(n!)^2}\,(2\pi)^{-2n}.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existen $M, r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f(z)| < M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r$. Muestre que f es un polinomio de grado a lo más n.

   Observe que el caso $n = 0$ es el teorema de Liouville.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera.

   (a) Muestre que el rango de f es denso en $\mathbb{C}$ o f es constante.

   (b) Suponga que $\mathrm{Re}(f)$ es acotada. Demuestre que f es constante.

4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in U$ y $R > 0$ tal que $B_R(z_0) \subseteq U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ centrada a z_0. Para $0 < r < R$ defina $M(r) := \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

   (a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $0 < r < R$

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Demuestre que para todo $0 < r < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2\,\mathrm{d}t \leq M(r)^2.$$