Análisis complejo

Taller 12

Convergencia de sucesiones de funciones.

Fecha de entrega: 07 de mayo de 2021

1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas y localmente acotadas $U \to \mathbb{C}$. Suponga que existe un $z_0 \in U$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ la sucesión $\left(f_n^{(k)}(z_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente.

2. Sean $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $U_2 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ y $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
   Encuentre funciones biholomorfas
   $$f : U_1 \to \mathbb{E}, \qquad g : U_2 \to \mathbb{E}.$$
   Existe una función homeomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{E}$?

3. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo y acotado con clausura $\overline{U}$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas $\overline{U} \to \mathbb{C}$ cuyas restricciones a U son holomorfas y suponga que la sucesión converge uniformemente en $\overline{U} \setminus U$. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\overline{U}$.

4. Encuentre una función biholomorfa $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re}(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.