

Análisis complejo

Taller 10

Continuación analítica

Fecha de entrega: 15 de abril de 2021

Sean $B_j := B_{r_j}(z_j)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) discos abiertos con $z_{j-1}, z_j \in B_{j-1} \cap B_j$ para todo $j = 1, \dots, n$. Entonces (B_0, B_1, \dots, B_n) se llama *cadena de discos*. Si $f_j : B_j \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas tal que $f_{j-1} = f_j$ en $B_{j-1} \cap B_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, entonces f_n se llama *extensión analítica de f_0 a lo largo de la cadena de discos B_0, \dots, B_n* .

1. Sea $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ una cadena de discos y sea $f_0 : B_0 \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Suponga que f_0' tiene una extensión analítica a lo largo de \mathcal{B} . Demuestra que f_0 también tiene extensión analítica a lo largo de \mathcal{B} .

2. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y sea $(f_t, U_t)_{t \in [0, 1]}$ una continuación analítica a lo largo de γ . Para $t \in [0, 1]$ sea $R(t)$ el radio de convergencia de la serie de Taylor de f_t centrada en $\gamma(t)$. Demuestre que $R(t) = \infty$ para todo t o que $R : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ es continuo.

3. Sea $U = B_1(0)$ y

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} z^{2^n}.$$

Demuestre que f no tiene extensión analítica a ningún conjunto abierto G con $G \supsetneq U$.

Hint. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un polinomio P_n tal que

$$f(e^{2\pi i/2^n} z) = P_n(z) + f(z).$$

4. Sea $U = B_1(0)$. Encuentre una continuación analítica a un conjunto lo más grande posible de

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) z^n.$$

Hint. Considere $f(w^2)$.