Análisis complejo

Taller 8

Teorema de Cauchy; residuos.

Fecha de entrega: 09 de abril de 2021

---

1. Calcule las siguientes integrales con métodos de análisis complejo:

$$(a)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}x, \qquad (b)\quad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad (c)\quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

2. Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto finito y sea $f : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C}$ holomorfa.
   (a) Muestre que $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ es holomorfa en $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.
   (b) Muestre que $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{c\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}_c f$.
   (c) Calcule $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{5z^6+4}{2z^7+1}\,\mathrm{d}z$.

3. Sea $R = \frac{P}{Q}$ con polinomios P y Q tal que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$. Muestre que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x$ existe y exprese este límite en términos de los residuos de R.

4. **Fracciones parciales de** $(\sin \pi a)^{-2}$**.**
   Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea γ_n el borde del rectángulo con esquinas $n + \frac{1}{2} + in$, $-n - \frac{1}{2} + in$, $-n - \frac{1}{2} - in$, $n + \frac{1}{2} - in$. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
   (a) Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+a)^2}\,\mathrm{d}z = 0$.
   (b) Demuestre que $\displaystyle\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$.

Ejercicios voluntarios

---

5. **[Cf. Taller 07, Ejercicio 2 de Teoría de Medida.]** Para $a > 0$ y $t > 0$ calcule las integrales impropias

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{t^2+x^2} \cos(ax)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x}{t^2+x^2} \sin(ax)\,\mathrm{d}x.$$

6. Determine todos los valores que puede tomar $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ si γ es un camino cerrado en $\mathbb{C}\setminus\{\pm\mathrm{i}\}$.

7. Sea $\gamma = \partial(B_2(0)\cap\{z\in\mathbb{C} : \Im(z)\geq 0\})$. Calcule las siguientes integrales:

$$(a)\quad \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(\sin z)^2\cos z}\,\mathrm{d}z, \qquad\qquad (b)\quad \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$$

8. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2}\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-a^2/2}$ para $a\in\mathbb{R}$.

Ayuda. Para $R>0$ considere el camino γ que es la frontera del rectángulo con esquinas $-R$, R, $R+\mathrm{i}a$ y $-R+\mathrm{i}a$.

9. (a) Sea $U\subset\mathbb{C}$ una región, $g: U\to\mathbb{C}$ holomorfa, f meromorfa en U con zeros en $z_1,\dots,z_n$ y polos en $p_1,\dots,p_k$. Sea γ una curva cerrada homotópicamente nula en U y suponga que $\gamma\cap\{z_1,\dots,z_n,p_1,\dots,p_k\}=\emptyset$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n g(z_j)\,\mathrm{ord}(f,z_j)_\gamma(z_j) - \sum_{j=1}^k g(p_j)\,\mathrm{ord}(f,p_j)_\gamma(p_j).$$

(b) Sea $U\subseteq\mathbb{C}$ abierto, sean $p\in\mathbb{C}$, $R>0$ tal que $\overline{B_R(p)}\subset U$. Sea $f: U\to\mathbb{C}$ holomorfa y suponga que $f|_{B_R(p)}$ es inyectiva. Sea $V := \{f(z) : z\in B_R(p)\}$. Entonces $f^{-1}: V\to B_R(p)$ está bien definida. Demuestre que

$$f^{-1}(q) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial B_R(p)} \frac{zf'(z)}{f(z)-q}\,\mathrm{d}z, \qquad\qquad q\in V.$$