Análisis complejo

Taller 7

Teorema de Cauchy; residuos.

Fecha de entrega: 19 de marzo de 2021

---

1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Suponga que para todo $a \in \mathbb{C}$, por lo menos un coeficiente en la serie de Taylor de f en a se anula. Muestre que f es un polinomio.

2. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 4\}$ y sea $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$.

   (a) Calcule $\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ donde γ es el círculo con radio 2 centrado en $\frac{1}{2\mathrm{i}}$.

   (b) ¿Existe una función holomorfa $g : U \to \mathbb{C}$ con $g'(z) = zf(z)$?

   (c) ¿Existe una función holomorfa $g : U \to \mathbb{C}$ con $g'(z) = z^2 f(z)$?

3. Calcule la parte principal en 0 de las funciones

$$f(z) = \frac{(\sin z)^2}{\sin(z^2)}, \qquad g(z) = \frac{1 - z^2}{z(1 - \cos(z^2))}.$$

4. (a) Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ p(z) = z^n$. Demuestre que $\operatorname{ind}_{p\circ\gamma}(0) = n \operatorname{ind}_\gamma(0)$.

   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo, $c \in U$ y γ una curva cerrada en $U \setminus \{c\}$ tal que $\operatorname{int}(\gamma) \subseteq D$. Para una función biholomorfa $f : U \to f(U)$ demuestre que

$$\operatorname{ind}_\gamma(c) = \operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(f(c)).$$