Análisis complejo

Taller 5

Singularidades aisladas.

Fecha de entrega: 05 de marzo de 2021

---

1. Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Para las siguientes funciones determine el tipo de la singularidad en 0. Si es una singularidad removible, determine la extensión continua de la función; si es un polo, determine la parte principal de su serie de Laurent en 0; si es una singularidad esencial, determine $\{f(z) : 0 < |z| < \varepsilon\}$ para $\varepsilon > 0$.

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^z}, \qquad g : D \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}},$$
$$h : D \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \cos\frac{1}{z}, \qquad k : D \to \mathbb{C}, \quad k(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfo. Muestre que e^f no tiene un polo en z_0.

3. Determine la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en las regiones $U_1 := \{0 < |z| < 1\}$, $U_2 := \{1 < |z| < 2\}$, $U_3 := \{|z| > 2\}$.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto que contiene a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Sea $f : U \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en 0. Suponga que f tiene un polo simple en 1. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.

   Preguntas adicionales (voluntarias): ¿Qué se puede concluir si

   (a) el polo de f no se encuentra en 1 sino en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ para algún $\varphi \in \mathbb{R}$?

   (b) el polo es de orden $k \geq 1$?

---

5. **Ejercicio voluntario. (Las afirmaciones del ejercicio deberían ser claras.)** Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in G$, $\widetilde{G} := G \setminus \{z_0\}$, $f, g : \widetilde{G} \to \mathbb{C}$ holomorfas y z_0 un polo de f y g. Sea

$$\operatorname{ord}(f, z_0) = \text{orden del polo de } f \text{ en } z_0 \text{ si } z_0 \text{ es un polo.}$$

   Muestre que z_0 es una singularidad no esencial de $f + g$, fg y, si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \widetilde{G}$, $\frac{f}{g}$ y que las siguientes fórmulas valen:

   (a) $\operatorname{ord}(f + g; z_0) \leq \max\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$,

   (b) $\operatorname{ord}(fg; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0)$,

   (c) $\operatorname{ord}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \operatorname{ord}(f; z_0) - \operatorname{ord}(g; z_0)$ si $\operatorname{ord}(f, z_0) > \operatorname{ord}(g, z_0)$.