Índice general

An Introduction to Riemann surfaces and the Riemann-Roch Theorem

Daniel Bermúdez

1. Introduction

These notes are written as part of the Complex Analysis course given in Los Andes University during the second semester of 2018, and are to a large extend inspired by Foster's book on Riemann Surfaces [For12] and a the lectures on compact Riemann surfaces by McMullen [McM]. The purpose of these notes is to give an introduction to Riemann Surfaces and to give an proof of the Riemann-Roch Theorem.

2. Basics of Riemann Surfaces

2.1. Objects: Riemann Surfaces

A Riemann Surface is a global object which looks locally like an open subset of $\mathbb{C}$. In a way, it is a one dimensional complex manifold, in particular it is a two dimensional real manifold.

Definición 1. Let X be a topological space. A *complex chart* $(U,\ \varphi)$ is an open set $U \subset X$ together with a homeomorphism $\varphi : U \to V \subset \mathbb{C}$. Two complex charts (U, φ) and (W, ψ) are said to be *holomorphically compatible* if

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \to \psi(U \cap W)$$

is biholomorphic.
A *complex atlas* on X is a collection of compatible charts $\Sigma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ which cover X, i.e. $\bigcup U_\alpha = X$.

Definición 2. A *Riemann surface* (X, Σ) is a topological Hausdorff, second countable space X together with a complex atlas Σ .

Remark 3. One can prove that the second countable condition is not necessary and follows from the complex structure. Moreover, without loss of generality one may consider the covering $\{U_i\}_{i\in I}$ composed of connected open sets, that is, a covering where the images of the coordinates charts are domains.

Remark 4. In particular, by forgetting the complex structure of $\mathbb{C}$, one can realize a Riemann surface X as a two dimensional real manifold. Thus, compact Riemann manifolds are (topologically) classified by their genus.

Ejemplo 5. $\mathbb{C}$ is trivially a Riemann surface with complex atlas given by one chart $(\mathbb{C}, \mathrm{Id})$.

Ejemplo 6. Any open subset $U \subset X$ of a Riemann surface (X, Σ) is a Riemann surface with complex atlas $\Sigma \cap U := \{V \cap U | U \in \Sigma\}$.
In particular $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ is a Riemann Surface.

Ejemplo 7 (Riemann Sphere). Let $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ be the (one point) compactification of the complex plane. Define charts by

$$\begin{aligned} &U_1 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \\ &\varphi_1 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C} \\ &\quad z \mapsto z \end{aligned} \quad , \qquad \begin{aligned} &U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \\ &\varphi_2 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \\ &\quad z \mapsto 1/z \end{aligned} \quad ,$$

where $1/\infty = 0$. These maps are homeomorphisms (both maps are involutions meaning they are their own inverses). Moreover, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = 1/z$ and $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = 1/z$ are holomorphic as maps $\mathbb{C} \setminus \{\infty, 0\} \to \mathbb{C} \setminus \{\infty, 0\}$. Hence $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ is a complex atlas on $\widehat{\mathbb{C}}$, turning it into a Riemann Surface.

Remark 8. As a matter of fact the Uniformization Theorem [Cha04] asserts that every simply connected Riemann Surface is biholomorphic to one of the above.

2.2. Morphisms: Holomorphic and Meromorphic functions

Since the definition of holomorphicity in $\mathbb{C}$ is local in nature, and Riemann Surfaces look locally like $\mathbb{C}$, one can borrow the definition of holomorphicity from the one in the case of $\mathbb{C}$.

Definición 9. A continuous function $f : X \to Y$ between Riemann Surfaces is *holomorphic* if for all charts $(U, \varphi : U \to \widetilde{U})$ of X and $(W, \psi : W \to \widetilde{W})$ of Y, the map

$$\widetilde{f} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widetilde{U} \to \widetilde{W}$$

is holomorphic as a map $\mathbb{C} \supset \widetilde{U} \to \mathbb{C}$.

If f is biyective and f^{-1} is holomorphic then f is said to be *biholomorphic*, and X, Y are said to be isomorphic as Riemann Surfaces.

Since most properties of holomorphic functions are of local nature, for instance the identity theorem or the open mapping theorem, most of these properties hold for holomorphic functions on Riemann surfaces.

Proposición 10 (Identity Principle). *Let X and Y be connected Riemann Surfaces and $f_1, f_2 : X \to Y$ two holomorphic mappings which coincide on a set $A \subset X$ having an accumulation point $a \in X$. Then $f_1 \equiv f_2$.*

Demostración. Consider

$$G := \{x \in X \mid \exists \text{ an open set } x \in U \text{ such that } f_1|_U \equiv f_2|_U\}.$$

By definition G is an open set. I claim that G is non-empty and closed, therefore connectedness of X implies $X = G$.

To check that G is non empty, let (U_a, φ) and $(V_{f(a)}, \psi)$ be connected charts containing a and $f(a)$ respectively. Since φ is a homeomorphism, the set where the functions $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \tilde{U}_a \to \widetilde{V}_{f(a)}$ coincide has an accumulation point, namely $\varphi(a)$. Therefore, the identity principle for domains in $\mathbb{C}$ implies $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$, which in turn implies $f_1|_{U_a} \equiv f_2|_{U_a}$ (recall that the chart maps are homeomorphisms), that is $a \in G$.

On the other hand, we will prove that G is closed. Let b be a limit point of G, let (U_b, φ) and $(V_{f(b)}, \psi)$ be connected charts containing b and $f(b)$ respectively. By continuity $f_1(b) = f_2(b)$, moreover $U \cap G \neq \emptyset$ which implies, by the identity principle in domains and the fact that both U and G are open, that $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$. Thus $f_1|_{U_b} \equiv f_2|_{U_b}$ and $b \in G$. □

Proposición 11 (Open mapping theorem). *Let X and Y be Riemann Surfaces and $f : X \to Y$ a non-constant holomorphic map. Then f is open.*

Demostración. Openness is a local property, that is, a map between topological spaces is open if and only if each point of the domain has a neighbourhood on which its restriction is open. Locally there exist charts such that $\tilde{f}$ is holomorphic from a domain to $\mathbb{C}$, thus the open mapping theorem holds. Since the charts are homeomorphisms, it follows that f is a locally open map, i.e. an open map. □

Corolario 12. *Let X be a compact and connected Riemann Surface and $f : X \to \mathbb{C}$ a holomorphic mapping. Then f is constant.*

Demostración. Suppose f is non-constant. By the proposition $f(X)$ is an open set. Moreover, since X is compact, $f(X)$ is compact and thus closed. That is $f(X) = \mathbb{C}$ which is a contradiction since $\mathbb{C}$ is not compact. □

Definición 13. A map $f : X \to Y$ is *meromorphic* if it is holomorphic in a open subset $X' := X \setminus S \subset X$ satisfying:

(I) S contains only isolated points,

(II) $\lim_{z \to p} |f(z)| = \infty$ for every $p \in S$.

Elements in S are called singularities.

The space of meromorphic functions from $X \to \mathbb{C}$ is denoted by $\mathcal{M}(X)$.

Just as in the case of meromorphic functions on domains, one can define the order of a meromorphic function $f \in \mathcal{M}(X)$ at a point $a \in X$. Let (U, φ) be a chart containing a and no other singularities, then $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ is a meromorphic function on a domain.

Definición 14. Let $f : X \to \mathbb{C}$ be a meromorphic function. The *order* of f at $a \in X$ is defined as

$$\operatorname{ord}_a(f) := \begin{cases} 0, & \text{if } \tilde{f} \text{ is holomorphic and non-zero at a,} \\ k, & \text{if } \tilde{f} \text{ has a zero of order k at a,} \\ -k, & \text{if } \tilde{f} \text{ has a pole of order k at a,} \\ \infty, & \text{if } \tilde{f} \text{ is identically zero in a neighborhood of a.} \end{cases}$$

This definition is independent of the choice of charts. Indeed, if (U, φ), (U', φ') are charts such that $a \in U, U'$. Let $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ and $\tilde{f}' = f \circ \varphi'^{-1}$, then $\tilde{f}' = \tilde{f} \circ (\varphi'^{-1} \circ \varphi)$. Recall $\varphi'^{-1} \circ \varphi$ is a biholomorphism, therefore, since the poles and zeros of meromorphic functions are invariant under biholomorphisms, $\tilde{f}$ and $\tilde{f}'$ have the same order.

Remark 15. By the identity principle the zeros (poles) are discrete. Otherwise there is an accumulation point where the map f $(1/f)$ is zero implying it is identically zero (∞). Therefore, the order of a meromomorphic function f is non-zero in a discrete set.

3. Sheaves and Cohomology

In the previous section it was shown that the dimension of the space of holomorphic functions on a compact Riemann Surface is 1. The Riemann-Roch theorem is a statement concerning the relationship between the topology of the space and the dimension of spaces of meromorphic functions with prescribed poles. To begin unveiling the relationship between the topology of the Riemann Surface and the space of meromorphic functions on it we need to develop some theory, specially some sheave and cohomology theory.

3.1. Basic Definitions of Sheaves

In the following section we let (X, τ_X) be a fixed topological space and consider the topology τ_X as a category where the objects are the open sets $U \in \tau_X$ and the arrows are the inclusions $U \hookrightarrow V$.

Definición 16. A *presheaf* $\mathbb{F}$ of abelian groups is a functor from $\tau_X^{op} \to \mathbf{Ab}$, where τ_X^{op} is the opposite category of τ_X and $\mathbf{Ab}$ is the category of abelian groups.

A presheaf is called a *sheaf* if the following are satisfied for every covering $\{V_i\}_{i \in I}$ of X:

(i) If $f, g \in \mathbb{F}(U)$ such that if $f|_{V_i} = g|_{V_i}$[1] for every $i \in I$, then $f = g$,

[1]We are abusing notation by denoting $f|_{V_i}$ to mean $F(\iota_{V_i}^U)[f]$, where $\iota_{V_i}^U : V_i \hookrightarrow U$ is the inclusion.

(ii) Given elements $f_i \in \mathbb{F}(V_i)$, $i \in I$, such that

$$f_i|_{V_i \cap V_j} = f_j|_{V_i \cap V_j} \qquad \text{for all} \quad i, j \in I$$

then there exists an $f \in \mathbb{F}(U)$ such that $f_{U_i} = f_i$ for every $i \in I$.

Ejemplo 17. Let X be a Riemann surface. For each open set $U \subset \mathbb{C}$ let $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ is holomorphic}\}$. Moreover, for each arrow $V \hookrightarrow U$ define

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_V^U : \mathcal{O}_U(P) &\to \mathcal{O}_V(P) \\ f &\mapsto f|_V. \end{aligned}$$

The given structure defines a sheaf, the *sheaf of holomorphic functions*.

Ejemplo 18. Let $P \xrightarrow{\pi} X$ be a principal bundle with fiber group A an abelian group. Then for every $U \subset X$ one can define $\Gamma_U(P) = \{s : U \to P | \pi \circ s = \mathrm{Id}\}$. The set $\Gamma_U(P)$ is a group with pointwise multiplication. Moreover, for each arrow $U \hookrightarrow V$ define

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_V^U : \Gamma_U(P) &\to \Gamma_V(P) \\ \varphi &\mapsto \varphi|_V. \end{aligned}$$

The given structure defines a presheaf. It is actually a sheaf since the objects are defined from a globally defined object $P \xrightarrow{\pi} X$.

Remark 19. Actually all sheaves look like this. To be precise, for every sheaf $\mathbb{F}$ there is a principal bundle $\mathcal{E} \xrightarrow{\pi} X$ (usually called the *etale space* of $\mathbb{F}$ [Moe02]) such that $\mathbb{F}(U) \cong \Gamma_U(\mathcal{E})$, and the isomorphism is compatible with the sheaf structure.

3.2. Sheaf Cohomology

In the further study of Riemann surfaces sheaves play a decided role via the cohomology of sheaves[2] defined by the topological and complex structure of a Riemann surface X.

3.3. Zeroth Cohomology Group $H^0(X, \mathbb{F})$

For now let us fix a Riemann surface X and a covering $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$.

Definición 20. Let $\mathbb{F}$ be a sheaf of abelian groups on X. Define the *k-th chain group* of $\mathbb{F}$ with respect to $\mathfrak{U}$, by

$$C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) = \prod_{(i_0, \cdots, i_k) \in I^{k+1}} \mathbb{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}).$$

Notice that $C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ has a abelian group structure given by component-wise multiplication. If $k < 0$ then $C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ is defined to be 0.

[2] The cohomology described in this section is known in the literature as the Čech Cohomology. This cohomology coincides with the sheaf cohomology for paracompact Hausdorff spaces, in particular for Riemann surfaces.

Remark 21. An element of a $C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ is of the form $(f_{i_0 \dots i_k})_{(i_0, \cdots, i_k) \in I^{k+1}}$ where $f_{i_0 \dots i_k}$ is understood to be in $\mathbb{F}(U_{i_0} \dots U_{i_n})$.

One can define a chain map δ such that $(C^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathbb{F}), \delta)$ is a chain complex. Thus one can define the associated cohomology of the complex.

Definición 22. Let $\delta_k : C^{k-1}(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) \to C^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$. The set of *$k$-cocycles* of $\mathbb{F}$ with respect to $\mathcal{U}$ is

$$Z^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) := \ker \delta_k.$$

The set of *k-coboundaries* of $\mathbb{F}$ with respect to $\mathfrak{U}$ is

$$B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) := \mathrm{Im} \delta_{k-1} = 0.$$

The *k-th cohomology* of $\mathbb{F}$ with respect to $\mathcal{U}$ is

$$H^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) = Z^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) / B^k(\mathfrak{U}, \mathbb{F}).$$

We will be concerned with chain groups of low order. In consequence we will just describe δ for orders 0 and 1.

Definición 23. Recall $C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) = 0$. The chain map δ at low order are defined by

$$\begin{aligned} \delta_0 : C^{-1}(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) &\to C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{F}), \\ \delta_0 &= 0, \\ \\ \delta_1 : C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) &\to C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}), \\ \delta(f_i)_{ij} &= f_i - f_j \qquad \text{on } U_i \cap U_j, \\ \\ \delta_2 : C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) &\to C^2(\mathfrak{U}, \mathbb{F}), \\ \delta(f_i j)_{ijk} &= f_{ij} - f_{jk} + f_{ki} \qquad \text{on } U_i \cap U_j \cap U_k. \end{aligned}$$

Proposición 24. $H^0(\mathcal{U}, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}(X)$.

Demostración. Notice $\delta_0 = 0$ thus $B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) = 0$, implying $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$. Now, the condition for $(f_i) \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{F})$ to be a 0-cochain is

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Since $\mathbb{F}$ is a sheaf the previous condition implies there exist a globally defined function $f \in \mathbb{F}(X)$ such that $f|_{U_i} = f_i$ for all $i \in I$ (condition (ii)). Moreover condition (i) implies that such an f is unique.

Define a map $\gamma : H^0(\mathcal{U}, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}(X)$ by $\gamma[(f_i)] = f$ where f is the map described above. To prove that γ is an isomorphism consider the map $\eta : \mathbb{F}(X) \to H^0(\mathcal{U}, \mathbb{F})$ given by $\gamma^{-1}(f) = (f|_{U_i})$. This map is an inverse of γ, indeed $\gamma \circ \eta(f) = \gamma[(f|_{U_i})] = f$ by the uniqueness property (i) of sheaves. On the other hand, $\eta \circ \gamma[(f_i)] = \eta(f) = (f|_{U_i})$, but by construction $f|_{U_i} = f_i$. Moreover the group structures of both $\mathbb{F}(X)$ and $H^0(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ are given by pointwise multiplication, therefore γ and η are group homorphisms. □

Remark 25. From the previous proposition $H^0(\mathcal{U}, \mathbb{F})$ is independent of the covering $\mathcal{U}$, thus the *zeroth cohomology group* $H^0(X, \mathbb{F})$ is well defined.

3.4. First Cohomology group $H^1(X, \mathbb{F})$

Unlike the zeroth cohomology group the group $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ does depend on the covering. In consequence, to define a cohomology depending just on the information of the sheaf one has to consider a limit process. We shall make this idea precise.

An open covering $\mathfrak{B}_{k\in K}$ is called finer than $\mathfrak{U}_{i\in I}$ ($\mathfrak{B}_{k\in K} < \mathfrak{U}_{i\in I}$) if every $V \in \mathfrak{B}_{k\in K}$ is contained in some $U_i \in \mathfrak{U}_{i\in I}$. Thus there is a mapping $\tau : K \to I$ such that

$$V_k \subset U_{\tau(k)} \quad \text{for every } k \in K.$$

This induces a map from $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) \to Z^1(\mathfrak{B}, \mathbb{F})$ which preserves boundaries. That is, it descents to a map of the quotients $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{B}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) \to H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{F})$.
Moreover, such a map is independent of the refining mapping τ and for three refinements, it holds $\mathfrak{B}_{k\in K} < \mathfrak{U} < \mathfrak{w}$, then

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{B}} \circ t^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{U}} = t^{\mathfrak{W}}_{\mathfrak{B}}.$$

Definición 26. The *first cohomology group* is the direct limit of the system defined by the the refinements of all open covers, i.e.

$$H^1(X, \mathbb{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) = \prod_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F}) / \sim,$$

where $\sim$ is defined as follows. Two cohomology classes $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{F})$ and $\eta \in H^1(\mathfrak{W}, \mathbb{F})$ are equivalent if there exist a refinement $\mathfrak{B}$ such that $t^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{U}}(\xi) = t^{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{U}}(\eta)$.

Proposición 27. *Let $\mathcal{O}$ be sheaf of holomorphic functions, then the* genus *is*

$$g := \dim(H^1(X, \mathcal{O})).$$

The genus is finite $g < \infty$ [For12].

Remark 28. For space admitting a contractible cover and a triangulation, such as a Riemann surface, the sheaf cohomology agrees with the simplical homology. Thus, our definition of genus agrees with the intuitive notion of handle in a surface.

3.5. The Long Exact Sequence

One of the main tools of a cohomology theory is the fact that a short exact sequence induces a long exact sequence in cohomology. In this section we introduce the notion of short exact sequence for sheaves, however we do not intend to prove that it induces a long exact sequence for the introduced cohomology (for this, one may consult [For12]).

Definición 29. Let $\mathbb{F}$ and $\mathcal{G}$ be sheaves. A *sheaf morphism* $\tau : \mathbb{F} \to \mathcal{G}$ is a family of group homorphism

$$\tau_U : \mathbb{F}(U) \to \mathcal{G}(U), \quad U \text{open in } X,$$

which are compatible with the restriction homomorphisms, i.e. $\tau_V \circ \mathbb{F}(\iota_V^U) = \mathcal{G}(\iota_V^U) \circ \tau_U$.

Definición 30. The *stack* of a sheaf $\mathbb{F}$ at $x \in X$ is the direct limit of the system described by a neighborhood system of the point x. To be precise, $\mathbb{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathbb{F}(U) = \prod_{x \in U} \mathbb{F}(U)/\sim$, where $\sim$ is defined as follows. Two elements $f \in \mathbb{F}(U)$ and $g \in \mathbb{F}(V)$ are equivalent if there exist an open set W such that $f|_W = f|_W$.

Definición 31. A sequence of sheaves

$$\mathcal{K} \to \mathbb{F} \to \mathcal{G}$$

is said to be *exact*, if the corresponding sequence of stacks

$$\mathcal{K}_x \to \mathbb{F}_x \to \mathcal{G}_x,$$

is exact for every $x \in X$.

Teorema 32. *Let*

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathbb{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

be an exact sequence of sheaves. Then there is an induced sequence of cohomology groups

$$0 \to H^0(X, \mathcal{K}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{K}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G})$$

which is exact.

4. Riemann-Roch Theorem

4.1. Divisors and Multiplier Sheaves

Definición 33. A *divisor* on a compact Riemann surface is a mapping

$$D : X \to \mathbb{Z},$$

with finite support.

Ejemplo 34. Fix a non-zero meromorphic function f on X. Define

$$\begin{aligned} D_f : X &\to \mathbb{Z} \\ a &\mapsto \operatorname{ord}_a(f). \end{aligned}$$

Recall that the order of f is non-zero in a discrete set. Since X is compact this set is actually finite. Thus, D_f is a divisor.

Definición 35. The *degree* of a divisor D is defined as

$$\sum_{x\in X} D(x).$$

A function is said to be *multiple* of a divisor D in U if $D_f(x) \geq D(x)$ for every $x \in U$. For instance f is holomorphic precisely when f is a multiple of 0.

Definición 36. Let D be a divisor on X. The *multiplier sheaf* $\mathcal{O}_D$ is the sheaf defined by

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U) | f \text{ is multiple of } D \text{ in } U\},$$

for each open subset $U \subset X$ (and maps defined by the natural restrictions).

Definición 37. Let P be a point of X. The *skyscraper sheaf* $\mathbb{C}_P$ is the sheaf defined by

$$\mathbb{C}_P(U) := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{if } P \in U, \\ 0 & \text{if } P \notin U, \end{cases}$$

for each open subset $U \subset X$ (and maps defined by the obvious homomorphism).

Proposición 38. *For a point P of a Riemann surface X,*

(I) $H^0(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}$,
(II) $H^1(X, \mathbb{C}_P) = 0$.

Demostración. **(i)** Recall $H^0(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}_P(X)$. Clearly $P \in X$, thus $H^01(X, \mathbb{C}_P) = \mathbb{C}$.
(ii) Let $[\eta] \in H^1(X, \mathbb{C}_P)$, represented by some cocycle $\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_P)$, for some cover $\mathfrak{U}$. The cover $\mathfrak{U}$ has a refinement $\mathfrak{B}$ such that the point P is contained in only one $V_x \in \mathfrak{B}$. However, 2-chains are defined in double intersections, implying any 2-chain is trivial. Therefore, $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}_P) = 0$. □

5. Riemann-Roch Theorem

At last we can state the Riemann-Roch Theorem

Teorema 39 (Riemann-Roch). *Suppose D is a divisor on a compact Riemann surface X of genus g. Then $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ and $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ are finite dimensional vector spaces and*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

5.1. First Ingredient

Proposición 40 (First Ingredient). *The Riemann-Roch theorem holds for $D = 0$.*

Demostración. Recall

$$H^0(X, \mathcal{O}_0) = H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C},$$

since every holomorphic map from a compact Riemann surface to $\mathbb{C}$ is constant, so $\dim H^0(X, \mathcal{O}_0) = 1$. Moreover, $H^1(X, \mathcal{O}_0) = H^1(X, \mathcal{O})$ and by definition $\dim H^1(X, \mathcal{O}_0) = g$. Therefore, the Riemann-Roch theorem holds for $D = 0$. □

5.2. Second Ingredient

For a point in $P \in X$ denote by P the divisor which takes the value 1 at P and zero otherwise.

Define a sheaf homomorphism

$$\beta : \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P$$

as follows. If $P \notin U$, then β_U is trivial homomorphism. Otherwise, let $f \in \mathcal{O}_{D+P}$ be a meromorphic function, and consider its Laurent series, with respect to the local coordinate z,

$$f = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n,$$

where $k = D(P)$. Set $\beta_U(f) = c_{-k-1}$.

Proposición 41. *The morphism β induces a short exact sequence of sheaves,*

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P \to 0.$$

Proposición 42 (Second Ingredient). *Let $P \in X$. If the Riemann-Roch theorem holds for a divisor D, then it holds for the divisor $D' = D + P$.*

Demostración. The short exact sequence

$$0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D+P} \to \mathbb{C}_P \to 0$$

induces a long exact sequence. Recalling $H^0(\mathbb{C}_P) = \mathbb{C}$ and $H^1(\mathbb{C}_P) = 0$, the sequence can be written as

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to \mathbb{C} \to \\ \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) \to 0. \end{aligned}$$

Therefore the alternating sums of the dimensions appearing in the above sequence is 0, i.e.

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) + 1 = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D).$$

However, $\deg(D + P) = \deg(D) + 1$. Therefore the above equality can be rewritten as

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+P}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+P}) + \deg(D + P) \\ = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) + \deg(D). \end{aligned}$$

The previous equality implies that if the Riemann-Roch formula holds for one of the two divisors, it aldo holds for the other. □

5.3. Riemann-Roch Theorem Proof

At last we can prove the Riemann-Roch theorem.

Demostración. An arbitrary divisor D may be written as

$$D = P_1 + P_2 + \cdots + P_m - P_{m+1} - \cdots - P_n,$$

for some points $P_i \in X$. Since the theorem holds for $D = 0$ by induction, and the second ingredient, it holds for D. $\square$

El teorema de Ax-Grothendieck

Nicolás Cuervo Ovalle

1. Introducción.

Sea K un cuerpo. Decimos que un mapa $f : K^n \to K^n$ es *polinomial* si $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \ldots, f_n(\overline{x}))$ con $f_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$ para $i = 1, \ldots, n$. El presente documento tiene por objetivo exponer el resultado de una prueba realizada, de manera independientemente, por Ax [Ax68] y Grothendieck [Gro61], el cual afirma lo siguiente:

Teorema 1. *Todo mapa polinomial inyectivo de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es sobreyectivo.*

Pese a que este resultado está dado sobre los números complejos, las pruebas planteadas originalmente por Ax y Grothendieck no se centran tanto en $\mathbb{C}$, sino en el hecho de que es un cuerpo algebraicamente cerrado. Asimismo, aunque existen pruebas planteadas por Borel [Bor69] y Rudin [Tao09] que utilizan herramientas tanto topológicas como analíticas características de $\mathbb{C}$, estas resultan ser bastante técnicas en comparación a las primeras, motivo por el que reproduciremos la prueba originalmente planteada por Ax.

Observación 2. Cabe resaltar que el inverso del teorema es falso, pues $z \mapsto z^2$ es sobreyectivo más no inyectivo.

2. Filtros y ultrafiltros.

Sea X un conjunto y denotemos por $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X.

Definición 3. Sea $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{P}(X)$, decimos que $\mathscr{F}$ es un *filtro* sobre X si:

(I) $X \in \mathscr{F}, \emptyset \notin \mathscr{F}$.

(II) Si $A, B \in \mathscr{F}$ entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$.

(III) Si $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathscr{F}$.

Ejemplo 4. a) Sea $x \in X$. Entonces $\mathscr{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ es un filtro, y todo filtro de esta forma es llamado un filtro *principal*.

b) Sea X infinito. Entonces $\mathscr{F}(X) = \{A \subseteq X | A \text{ es cofinito } \}$ es un filtro. Este filtro es llamado el filtro de Fréchet. Note que este filtro no es principal.

Definición 5. Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre X. Decimos que $\mathscr{F}$ es un *ultrafiltro* si para todo $A \subseteq X$ se tiene que: $A \in \mathscr{F}$ ó $A \notin \mathscr{F}$.

Remark 6. Un filtro $\mathscr{F}$ sobre X es un ultrafiltro si y solo si es un filtro maximal.

Note que para todo $x \in X$, $\mathscr{F}_x$ es un ultrafiltro. Es natural preguntarse lo siguiente: ¿todo ultrafiltro es principal?

Lema 7. *Un ultrafiltro $\mathscr{F}$ sobre X no es principal si y solo si $\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = \emptyset$.*

Demostración. ($\Rightarrow$): Suponga por contradicción $\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = B \neq \emptyset$, luego tome $x \in B$, entonces es claro que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_x$. Como $\mathscr{F}$ es un ultrafiltro, es maximal, entonces $\mathscr{F} = \mathscr{F}_x$ contradiciendo el hecho de que $\mathscr{F}$ no es principal.
($\Leftarrow$) : Si $\mathscr{F}$ fuera principal tendríamos que para todo $A \in \mathscr{F}$, $x \in A$, luego $\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A \neq \emptyset$, contradicción. $\square$

Corolario 8. *Todo ultrafiltro no principal sobre X infinito contiene el filtro de Fréchet.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro no principal sobre X y tome $B \in \mathscr{F}(X)$. Por definición $X \backslash B$ es finito, y por el lema anterior $\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A = \emptyset$. Entonces para todo $x \in X\backslash B$ existe $A_x \in \mathscr{F}$ tal que $x \notin A_x$. Llame $A = \bigcap_{x \in X\backslash B} A_x$, entonces $A \in \mathscr{F}$ y $A \cap (X\backslash B) = \emptyset$, luego $A \subseteq B$ y $B \in \mathscr{F}$. Entonces $\mathscr{F}(X) \subseteq \mathscr{F}$. $\square$

De esta forma tenemos que si existiera un ultrafiltro no principal sobre un conjunto infinito, este contendría el filtro de Frechét. Sin embargo, para mostrar la existencia de ultrafiltros no principales es necesario el uso del axioma de elección, más precisamente el lema de Zorn.

Proposición 9. *Todo filtro $\mathscr{F}$ sobre X está contenido en un ultrafiltro sobre X.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre X, y aplique el lema de Zorn al retículo de filtros sobre X que contienen a $\mathscr{F}$. $\square$

Corolario 10. *Existe un ultrafiltro no principal sobre cualquier conjunto infinito.*

3. El teorema de Ax-Grothendieck

Comenzaremos esta sección recordando un resultado clásico de Steinitz, el cual usaremos más adelante:

Teorema 11 (Steinitz). *Los cuerpos algebraicamente cerrados de una característica fija están determinados por la cardinalidad de su base de trascendencia.*

Corolario 12. *Si K es un cuerpo algebraicamente cerrado con característica $p \geq 0$ y $|K| > \aleph_0$, entonces K es único módulo isomorfismo.*

Remark 13. Sea $\mathbb{F}_p$ el cuerpo finito de característica p, $p > 0$ primo. La clausura algebraica de $\mathbb{F}_p$, la cual denotaremos por $\overline{\mathbb{F}}_p$, es un cuerpo infinito contable que contiene una copia de cada $\mathbb{F}_{p^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y de hecho $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$.

Lema 14. *Todo polinomio inyectivo de $\overline{\mathbb{F}_p}^n \to \overline{\mathbb{F}_p}^n$ es sobreyectivo.*

Demostración. Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)$ un mapa polinomial inyectivo de $\overline{\mathbb{F}_p}^n$ en $\overline{\mathbb{F}_p}^n$. Supongamos por contradicción que f no es sobreyectiva, entonces existe $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \overline{\mathbb{F}_p}^n$ tal que $y \notin$ Rango(f). Definamos S como el conjunto de todos los coeficientes que aparecen en los f_i de f. Note que este conjunto es finito. Sea $K = \mathbb{F}_p(S, y)$, K es un cuerpo finito. Considere entonces $f \restriction_{K^n} : K^n \to K^n$. Esta función es inyectiva y como K^n es finito, entonces $f \restriction_{K^n}$ es sobreyectivo, luego $y \in$ Rango$(f \restriction_{K^n}) \subseteq$ Rango(f), contradicción. $\square$

Ahora nuestro objetivo es construir un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, $\mathbb{F}$, que en cierto sentido cumple que $\lim_{p \to \infty} \overline{\mathbb{F}}_p = \mathbb{F}$.

Tome $\mathbb{P}$ el conjunto de números primos y llame $F = \prod_{p \in \mathbb{P}} \overline{\mathbb{F}}_p$. F es claramente un anillo con suma y multiplicación por componentes. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{P}$, y defina una relación de equivalencia sobre F definida de la siguiente manera:

$$a, b \in F,\ a \sim_{\mathscr{U}} b \iff \{p \in \mathbb{P} | a_p = b_p\} \in \mathscr{U}.$$

Tome $\mathbb{F} = F/{\sim_{\mathscr{U}}}$. Defina las siguientes operaciones sobre $\mathbb{F}$:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

No es difícil ver que estas operaciones están bien definidas y hacen a $\mathbb{F}$ un anillo. Llamamos a $\mathbb{F}$ el *ultraproducto* de $\{\overline{\mathbb{F}}_p\}_{p \in \mathbb{P}}$ sobre $\mathscr{U}$.

Lema 15. *$\mathbb{F}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.*

Demostración. Probemos primero que todo $\overline{a} \in \mathbb{F} \backslash \{\overline{0}\}$ tiene un inverso. Como $\overline{a} \nsim_{\mathscr{U}} \overline{0}$, existe un $A \in \mathscr{U}$ tal que para todo $p \in A$, $a_p \neq 0_p$. Llame entonces $b_p = a_p^{-1}$ para $p \in A$ y $b_p = 0$ para $p \notin A$. De esta manera tome $\overline{c} = \overline{ab}$ como $c_p = 1$ para todo $p \in A \in \mathscr{U}$ tenemos que $\overline{c} \sim_{\mathscr{U}} \overline{1}$. Luego $\mathbb{F}$ es un cuerpo.

Para ver que $Char(\mathbb{F}) = 0$, suponga que no. Entonces $\rho = Char(\mathbb{F}) > 0$ y llame $A = \mathbb{P} \backslash \{\rho\}$. Como A es cofinito entonces $A \in \mathscr{U}$. De esta manera, $\rho\overline{1} = (\rho 1_p)_{p \in \mathbb{P}}$ tiene una coordenada distinta de cero para todo $p \in A$ entonces $\rho\overline{1} \nsim_{\mathscr{U}} \overline{0}$, contradicción.

Por último veamos que $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado. Sea $\overline{P}(x) \in \mathbb{F}[x]$ con $\deg(\overline{P}(x)) \geq 1$. Entonces $\overline{P}(x) = \overline{a_n} x^n + \cdots + \overline{a_1} x + \overline{a_0}$, con $\overline{a_n} \nsim_{\mathscr{U}} \overline{0}$. Note que $\overline{P}(x)$ induce un polinomio $P_q(x) = a_n^q x^n + \cdots + a_1^q x + a_0^q \in \overline{\mathbb{F}}_q[x]$ para todo $q \in \mathbb{P}$. Como $\overline{a_n} \nsim_{\mathscr{U}} 0$, existe $A \in \mathscr{U}$ tal que para todo $q \in A$,

$a_n^q \neq 0$, luego $P_q(x)$ no es constante y existe $\alpha_q \in \overline{\mathbb{F}}_q$ tal que $P_q(\alpha_q) = 0$, para todo $q \in A$. Llame $\alpha = (\alpha_q)_{q\in A} \cup (0_q)_{q\notin A}$, así $\overline{\alpha} \in \mathbb{F}$ y $\overline{P}(\overline{\alpha}) \sim_{\mathscr{U}} \overline{0}$. Entonces $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado. $\square$

Teorema 16. *Todo mapa polinomial* $\overline{f} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ *inyectivo es sobreyectivo.*

Demostración. Sea $\overline{f} = (\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n})$ un mapa polinomial inyectivo. Para todo $p \in \mathbb{P}$, $\overline{f_i} \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ induce un polinomio $f_i^p \in \overline{\mathbb{F}}_p[x_1, \ldots, x_n]$. Llame $f_p = (f_1^p, \ldots, f_n^p) : \overline{\mathbb{F}_p}^n \to \overline{\mathbb{F}_p}^n$, al mapa polinomial inducido.

Afirmación: Sea $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que para todo $p \in A$, f_p es inyectivo. Entonces $A \in \mathscr{U}$.
Si $A \notin \mathscr{U}$, entonces $B = \mathbb{P} \backslash A \in \mathscr{U}$. Para todo $p \in B$ existen $\tilde{\alpha_p}, \tilde{\beta_p} \in \overline{\mathbb{F}_p}^n$, con $\tilde{\alpha_p} \neq \tilde{\beta_p}$, tal que $f_p(\tilde{\alpha_p}) = f_p(\tilde{\beta_p})$. Llame $\alpha = (\tilde{\alpha_p})_{p\in B} \cup (0_p)_{p\notin B}$ y $\beta = (\tilde{\beta_p})_{p\in B} \cup (0_p)_{p\notin B}$, entonces $\overline{\alpha} \nsim_{\mathscr{U}} \overline{\beta}$, pues difieren en todo $B \in \mathscr{U}$, pero $\overline{f}(\overline{\alpha}) \sim_{\mathscr{U}} \overline{f}(\overline{\beta})$, lo que contradice la inyectividad de $\overline{f}$. Entonces $A \in \mathscr{U}$.
Por el Lema 14 para todo $p \in A$ tenemos que f_p es sobreyectivo. De esta manera, sea $\overline{b} = (\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}) \in \mathbb{F}^n$, entonces para todo $p \in A$ existe $(a_1^p, \ldots, a_n^p) \in \overline{\mathbb{F}_p}^n$ tal que $f_p(a_1^p, \ldots, a_n^p) = (b_1^p, \ldots, b_n^p)$. Así, para cada $i = 1, \ldots, n$ llame $a_i = (a_i^p)_{p\in A} \cup (0_p)_{p\notin A}$. Entonces $(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) \in \mathbb{F}^n$ y por construcción $\overline{f}(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}) \sim_{\mathscr{U}} (\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n})$. $\square$

Lema 17. *La cadinalidad de* $\mathbb{F}$ *es* $2^{\aleph_0}$

Demostración. La prueba de este teorema se sale de los objetivos de este documento, sin embargo el lector podrá encontrar una prueba detallada en la Proposición 4.3.7 en [CK90]. $\square$

Corolario 18 (Ax-Grothendieck). *Todo mapa polinomial inyectivo de* $\mathbb{C}^n$ *en* $\mathbb{C}^n$ *es sobreyectivo.*

Demostración. Por el Lema 17 y el corolario 12 tenemos que $\mathbb{F} \cong \mathbb{C}$, luego por el teorema 16, tenemos el resultado deseado. $\square$

Linealización vs Estabilidad

Daniel Pallejá López

1. Introducción

En el estudio de funciones de una variable compleja, un problema sencillo en naturaleza, pero suficientemente rico en propiedades, es la linealización sobre gérmenes de funciones localmente biholomorfas con punto fijo $z = 0$. Este proyecto se dividirá en dos secciones, primero se estudiarán condiciones sobre la derivada en cero para distinguir gérmenes linealizables, para luego estudiar la dinámica en $\mathbb{C}$ generada por la acción de funciones. En la segunda sección nos interesará la estabilidad, que resultará equivalente bajo condiciones razonables a linealización.

2. Nociones básicas

Sea $\mathbb{C}[[z]]$ el conjunto de las series formales con coeficientes en $\mathbb{C}$, y $\mathbb{C}\{z\} \subseteq \mathbb{C}[[z]]$ el subconjunto de series convergentes. Recordemos que un *germen* $[f]_a$ es la colección de todos los *function elements* (g, D) tales que $a \in D$ y $f(z) = g(z)$ para todo z en una vecindad de a, es decir que la serie de potencias de f y g alrededor de a es la misma, así que de ahora en adelante cuando hablemos de gérmenes de funciones, indiscriminadamente nos referiremos a la serie de potencias alrededor del 0 de alguna función representante.
Sea entonces G el conjunto de gérmenes de biholomorfismos locales en 0 y $\widehat{G}$ el conjunto de gérmenes formales (o para nuestro interés, series de potencias formales) sin término independiente. Se tiene entonces $G = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} G_\lambda$, y $\widehat{G} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}^*} \widehat{G}_\lambda$ donde

$$G_\lambda = \left\{ f \in z\mathbb{C}\{z\} : f(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} f_n z^n, \right\},$$

$$\widehat{G}_\lambda = \left\{ \hat{f} \in z\mathbb{C}[[z]] : \hat{f}(z) = \lambda z + \sum_{n \geq 2} \hat{f}_n z^n \right\}.$$

Note que la función identidad $\mathrm{Id} \in G$ y que la composición elementos en G es una operación bien definida, así que solo resta mostrar que la inversa de una función holomorfa es holomorfa para concluir que es un grupo con la operación de composición. Como el 0 es un punto fijo de nuestros gérmenes, abusaremos de notación y nos referiremos siempre a las restricciones donde la composición tenga sentido. Igualmente, omitiremos el símbolo de $\circ$ y simplemente escribiremos concatenadamente los símbolos de funciones para referirnos a composición.

Proposición 1. *Dados $U, V \subseteq \mathbb{C}$ regiones y $f : U \to V$ una función holomorfa inyectiva, entonces su inversa f^{-1} es holomorfa.*

Demostración. Podemos ver a f como una función de dos variables reales, $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$. Sabemos que $J(f) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}$. Como $|f'(x,y)| \neq 0$, se tiene que

$$J(f^{-1}) = \frac{1}{\det(J(f))} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix}.$$

Es decir, f^{-1} satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y por lo tanto es holomorfa. $\square$

Proposición 2. *Sea $f \in G_\lambda$ (resp. $\hat{f} \in \widehat{G}_\lambda$) y sea $g \in G_1$ (resp. $\hat{g} \in \widehat{G}_1$). Entonces, $h = g^{-1} f g \in G_\lambda$ (resp. $\hat{h} = \hat{g}^{-1} \hat{f} \hat{g} \in \widehat{G}_\lambda$).*

Demostración. Se tiene por hipótesis $h = g^{-1} f g \Rightarrow fh = hg$, es decir que

$$\lambda \bigg(z + \sum_{n \geq 2} f_n \Big(\sum_{j \geq 1} h_j z^j \Big)^n \bigg) = \sum_{n \geq 1} h_n \Big(\sum_{j \geq 1} g_j z^j \Big)^n,$$

de esto se puede ver que $h_1 = \lambda$. $\square$

3. Linealización

Es usual encontrar en matemáticas soluciones a problemas lineales antes que a problemas no-lineales, razón que nos motiva a encontrar en esta sección condiciones para que exista una conjugación que convierta nuestro germen en una función lineal, o equivalentemente, que sea una solución de la ecuación de Schröder $\Psi(h(x)) = \lambda \Psi(x)$. Por la proposición 2, esperamos que $h'(0) = \lambda$. Primero discutiremos resultados. El elemento más simple de G_λ es una homotecia, la cual denotaremos por $R_\lambda(z) = \lambda z$

Definición 3. Una función $f \in G_\lambda$ es *linealizable* si existe $g \in G_1$ tal que $g^{-1} f g = R_\lambda$, y se dice que g *linealiza* a f.
Análogamente, una función $\hat{f} \in \widehat{G}_\lambda$ es *formalmente linealizable* si existe $\hat{g} \in \widehat{G}_1$ tal que $\hat{g}^{-1} f \hat{g} = R_\lambda$, y se dice que $\hat{g}$ *linealiza formalmente* a $\hat{f}$.

Proposición 4. *Sea λ una raíz de la unidad de orden q. Un germen $f \in G_\lambda$ es linealizable si y solo si $f^q = \mathrm{Id}$. El resultado análogo se tiene para $\hat{f} \in \widehat{G}_\lambda$.*

Demostración. Si f es linealizable, entonces existe $g \in G$ tal que $g^{-1} \circ f \circ g(z) = \lambda z$. Es fácil ahora ver que $f^q = g \circ R_\lambda^q \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}$.
Por otro lado, si $f^q = \mathrm{Id}$, se puede ver que $h := \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \lambda^{-j} f^j$ linealiza a f.
Para esto, note que $f^r(z) = \lambda^r z + \dots$, así $h \in G_1$. Basta entonces ver que $h \circ f = R_\lambda \circ h$.

$$\begin{aligned} h \circ f(z) &= \frac{1}{q}(\lambda^0 f^0(f(z)) + \lambda^{-1} f^1(f(z)) + \cdots + \lambda^{-q+1} f^{q-1}(f(z)) \\ &= \lambda \frac{1}{q}(\lambda^{-1} f(z) + \lambda^{-2} f^2(z) + \cdots + \lambda^{-q} f^{q-1}(z)) = \lambda h(z) \end{aligned}$$ □

Proposición 5. *Dado λ que no sea una raíz de la unidad, entonces cada $\hat{f} \in \widehat{G}_\lambda$ es formalmente linealizable.*

Demostración. (Boceto) Sea $\hat{f} \in \widehat{G}_\lambda$, definamos $\hat{h}_1 = 1$ y recursivamente para $n \geq 2$,

$$\hat{h}_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{j=2}^{n} f_j \sum_{n_1 + \cdots + n_j = n} \hat{h}_{n_1} \dots \hat{h}_{n_j}.$$

Considerando $\hat{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}_n z^n$, se tiene que $h \in \widehat{G}_1$ y además se puede ver que $\hat{f}\hat{h} = \hat{h} R_\lambda$, es decir que $\hat{f}$ es formalmente linealizable por $\hat{h}$. □

Teorema 6 (Koenigs-Poincaré [Mar00]). *Si $|\lambda| \neq 1$, entonces cada $f \in G_\lambda$ es linealizable.*

Demostración. Sea $f \in G_\lambda$, por la fórmula integral de Cauchy, existen $c_1 > 1$ y $r \in (0,1)$ tal que $|f_j| \leq c_1 r^{1-j}$ para todo $j \geq 2$. Dado que $|\lambda| \neq 1$, existe algún $c_2 > 1$ tal que $|\lambda^n - \lambda|^{-1} \leq c_2$ para todo $n \geq 2$.
Definamos ahora $\sigma_1 = 1$ y σ_n con la relación de recurrencia

$$\sigma_n = \sum_{j=2}^{n} \sum_{n_1 + \cdots + n_j = n} \sigma_{n_1} \dots \sigma_{n_j}.$$

Se puede ver entonces, que la serie formal $\sigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n z^n$ satisface la ecuación

$$z = \sigma(z) z + \sigma(z) - 2\sigma^2(z).$$

Luego, $\sigma(z) = \frac{1+z-\sqrt{1-6z+z^2}}{4}$ es analítica en $|z| < 3 - 2\sqrt{2}$, acotada y continua en el borde, entonces por la estimada de Cauchy, $\sigma_n \leq c_3(3-2\sqrt{2})^{1-n}$ para algún $c_3 > 0$. Dado que λ no es una raíz de la unidad, f es formalmente linealizable por h como en la proposición 1.5. Por inducción se puede ver que $|\hat{h}_n| \leq (c_1 c_2 r^{-}1)^{n-1} \sigma_n$, es decir que $h \in G_1$. □

Como se vio en la proposición 2, la acción por conjugación en G_λ deja invariante a λ, y es más, $f \in G_\lambda$ es linealizable si y solo si Ad_{R_μ} (donde $R_\mu(z) = \lambda z$ y $Ad_{R_\mu} f = R_\mu^{-1} f R_\mu$ como en notación de grupos) es también linealizable para todo $\mu \in \mathbb{C}^*$. Considere S el espacio de funciones holomorfas inyectivas $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $F(0) = 0$, entonces el siguiente mapa, donde $\mathbb{D}_r = \overline{B_r(0)}$

$$G \to S, \qquad f \mapsto F = \begin{cases} f, & \text{si } f \text{ es inyectiva en } \mathbb{D}, \\ Ad_{R_r} f, & \text{si } f \text{ es inyectiva en } \mathbb{D}_r \end{cases}$$

normaliza los gérmenes en G a funciones holomorfas inyectivas con dominio $\mathbb{D}$, para un $r > 0$ adecuado. En principio, el mapa no está bien definido, pero por axioma de elección, a cada germen se le puede asignar un germen inyectivo en $\mathbb{D}$ que es linealizable si y solo si su preimagen también lo es. Lo que significa que ahora centraremos nuestra atención en el espacio S.

4. Estabilidad

Un *sistema dinámico* es la acción de un semigrupo sobre algún espacio. El objetivo de esta sección, será entender la acción de G sobre elementos de $\mathbb{C}$ a través de la evaluación. Como meta de esta sección, llegaremos a ver que la linealización (siendo una propiedad analítica) es equivalente a la estabilidad (siendo una propiedad topológica).

Definición 7. Un punto $w \in \mathbb{C}$ es *estable* en una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, si para todo $\epsilon > 0$ existe W vecindad de w tal que para todo $z \in W$ y para todo $n \geq 0$ se tiene que $|f^n(w) - f^n(z)| \leq \epsilon$

Realmente, podemos extender esta definición a funciones meromorfas en la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{C}$, sin embargo, nuestro interés es mucho más específico, por lo que nos preocuparemos por el caso de $z = 0$ y abusando un poco del lenguaje, tendremos la siguiente definición equivalente.

Definición 8. *0 es estable* en una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, si existe una vecindad U de 0 tal que f^n está definida en U para todo $n \in \mathbb{N}$ y además, para todo $z \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f^n(z)| < 1$.

Note que la Definición 7 implica que la vecindad W escogida está dentro de la bola $B_\epsilon(w)$. Para puntos fijos podemos definir estabilidad en el sentido amplio de topología, ya que solo queremos que dada una vecindad del punto, encontremos otra contenida en ella que las imágenes iteradas a través de la función vuelvan a ser subconjuntos de la vecindad dada. Podemos ver entonces que las definiciones 7 y 7 son equivalentes en el siguiente sentido:

Proposición 9. *Dada una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inyectiva en $\mathbb{D}$ con $f(0) = 0$, entonces el punto 0 es estable en el sentido de Definición 7 si y solo si 0 es es estable en $f|_{\mathbb{D}}$ en el sentido de Definición 7.*

Demostración. Suponga que 0 es estable en el sentido de Defición 7, existe $W \subseteq B_1(0)$ vecindad básica de 0 tal que $|f^n(z)| < 1$ para todo $z \in W$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, $f^n(W) \subseteq B_1(0)$ es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(W)$ es una vecindad de 0 en la que f^n está definida para todo $n \in \mathbb{N}$ y sus imágenes iteradas caen $B_1(0)$.
Por otro lado, si 0 es estable en el sentido de Definición 7, reconstruyendo la prueba del lema de Schwarz, sea

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ f'(z), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Para todo $r > 0$, se tiene que $\max_{\mathbb{D}_r} f(z) \in \partial\mathbb{D}_r$. Sea z_r testigo de tal máximo y

$$R = \sup\{r > 0 : B_r(0) \subseteq U\}.$$

Se tiene entonces para todo $z \in \mathbb{D}_r$,

$$|g(z)| \leq |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} \leq \frac{1}{r},$$

y así, si $r \to R$, obtenemos lo que queremos, $|f(z)| \leq |z|/R \leq |z|$, pues basta tomar la vecindad $B_\epsilon(0)$ para que $|f^n(z)| \leq \epsilon$. □

Proposición 10. *Para toda $f \in S$ tal que $|f'(0)| < 1$, el punto 0 es estable.*

Demostración. Sea $f'(0) = \lambda$. Por la expansión en serie de potencias de f, se obtiene $f(z) = \lambda z + z^2 h(z)$, con h holomorfa en $\mathbb{D}$. Sea $M = \max_{z \in \mathbb{D}}(h(z))$, se puede ver que $|f(z)| \leq |z||\lambda| + |z|^2 M$. Esto implica junto con el principio del máximo que si $\delta = \min(\frac{1-\delta}{M}, 1)$ y $|z| < \delta$, entonces $|f(z)| \leq |z| \leq 1$, y así 0 es estable en el sentido de Defінción 7. □

Para cada función $f \in S$ con $|f'(0)| \leq 1$, tenemos el siguiente compacto $f-$invariante (por f-invariante queremos decir que su imagen es igual a su preimagen a través de f)

$$0 \in K_f := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(\mathbb{D}).$$

Denotaremos U_f la componente conexa del interior de K_f que contenga al 0.

Proposición 11. *Dada una función $f \in S$ tal que $|f'(0)| \leq 1$. Entonces 0 es estable si y solo si $U_f \neq \emptyset$*

Demostración. Para $|f'(0)| < 1$ se ve, por la proposición 2.4 y su construcción, que 0 es estable y que existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(0)) \subseteq (B_\delta(0)$ y así $U_f \neq \emptyset$. Si $|f'(0)| = 1$, entonces por una construcción igual a la de la proposición 2.4, se puede ver que existe $U \subseteq D$ vecindad de 0 tal que $f(U) \subseteq U$ y por lo tanto, $U \subseteq f^{-n}(U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $U \subseteq K_f$. Por otro lado, si $U_f \neq \emptyset$, entonces $U_f \subseteq \mathbb{D}$ y $f^n(U_f) \subseteq U_f \subseteq \mathbb{D}$, de modo que f es estable. □

Teorema 12. *Dada una función $f \in S$ tal que $|f'(0)| \leq 1$. Entonces 0 es estable si y solo si f es linealizable.*

Demostración. Si $|f'(0)| < 1$, entonces por el teorema de Koenigs-Poincaré y la proposición 2.4, se cumple lo requerido. Supongamos entonces que $|f'(0)| = 1$. Si f es estable, $U_f \neq \emptyset$ y simplemente conexo, pues si no lo fuera, tome V un hueco de U_f y γ una curva en U_f tal que V esté en el interior de γ, entonces por el principio del máximo, $|f^n(V)| < \max f^n(\gamma) < 1$, es decir que $V \subseteq U_f$. $\Rightarrow\Leftarrow$. Luego, por el *Riemman mapping theorem*, U_f es conformalmente equivalente a $B_1(0)$ a través de alguna función $R : U_f \to B_1(0)$. Además podemos ver que $R(0) = 0$ y $(R^{-1} \circ f \circ R)' = ((R^{-1} \circ f)' \circ R)R' = (((R^-1)' \circ f)f' \circ R)R'$. De donde se ve que $Ad_R f'(0) = f'(0)$ y por el lema de Schwarz, $Ad_R f(z) = \lambda z$.
Si f es linealizable, entonces h tal que linealiza a f, mapea conformalmente algún disco pequeño $\mathbb{D}_r$ a $\mathbb{D}$. Además, como $(h^{-1} f h)^n(z) = h^{-1} f^n h(z) = \lambda^n z$, se puede ver que $|f^n| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}_r$, es decir que f es estable. □

Conjuntos de Julia y de Fatou en funciones racionales

Camilo Andrés Pérez Triana

Una importante aplicación del teorema de Montel es dado en el campo de los sistemas dinámicos. Funciones tan sencillas como las racionales inducen una partición del plano complejo extendido en dos: el conjunto de Julia y el conjunto de Fatou. Entre ambos describen comportamientos de las iteraciones de funciones holomorfas sobre superficies de Riemann; aunque ellos mismos tendrán muchas veces más relevancia. Este trabajo tiene como objetivo presentar algunas propiedades básicas de ambos conjuntos, tomando de guía los textos de Milnor [Mil06] y Carleson-Gamelin [CG93].

Notación. El espacio ambiente por defecto, es el plano complejo extendido denotado por $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y en adelante solo se estará interesado en funciones holomorfas $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ no constantes. Cabe resaltar que toda función holomorfa $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ puede ser expresada como función racional. De esta manera, las funciones a tratar son las racionales. Se denotará el grado de f como $\text{grad}(f)$ y hará referencia a el máximo grado entre los polinomios p y q con $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ y sin que coincidan los ceros de p y de q. Además denotaremos a la n-ésima iteración de f como $f^{\circ n} = f(\cdots(f(z)))$.

Los resultados más importantes están soportados en la siguiente versión del teorema de Montel, para una prueba ver [CG93] (pág. 11):

Teorema 1 (Montel). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas $f : U \to \mathbb{C}^*$ que omite tres diferentes valores. Entonces $\mathcal{F}$ es una familia normal.*

Definición 2. El conjunto de los puntos $z \in \mathbb{C}^*$ que tienen una vecindad abierta W tal que $\{f^{\circ n}|_W\}$ forma una familia normal de funciones holomorfas se le conoce como *conjunto Fatou* de f y se denota por $\mathcal{F}(f)$. Al conjunto $\mathcal{J}(f) := \mathbb{C}^* \backslash \mathcal{F}(f)$ se le conoce como el *conjunto de Julia* de f.

De la definición, se deduce que los conjuntos $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$, son abiertos y cerrados respectivamente. También:

Lema 3 (Invarianza). *El conjunto $\mathcal{F}(f)$ (ó $\mathcal{J}(f)$) es totalmente invariante bajo f. Esto es, $z \in \mathcal{F}(f)$ (ó $\mathcal{J}(f)$) si y solo si $f(z) \in \mathcal{F}(f)$ (ó $\mathcal{J}(f)$).*

Demostración. Supongamos que $f(z) \in \mathcal{F}(f)$. Se quiere ver que existe un abierto U que contiene a z tal que la familia $\{f^{\circ n}|_U\}$ es normal. Como $f^{\circ^n}(z) = f^{\circ(n-1)}(f(z))$, $\{f^{\circ^(n-1)}|_V\}$ es normal para cierto V abierto que contiene a $f(z)$; y si se hace $U := f^{-1}(V)$, $z \in U$ y $\{f^{\circ n}|_U\}$ es una familia normal. Por lo tanto, $z \in \mathcal{F}(f)$.
Por otra parte, si se supone que $z \in \mathcal{F}$ y teniendo en cuenta que $f^{\circ n}(f(z)) = f^{\circ(n+1)}(z)$, $\{f^{\circ(n+1)}|_V\}$ es una familia normal, con V un abierto que contiene a z. Luego, escogiendo $U = f(V)$ se concluye que $\{f^{\circ n}|_U\}$ es normal, $f(z) \in U$ y así $f(z) \in \mathcal{F}(f)$. □

La definición del conjunto de Fatou se puede reescribir diciendo que $\mathcal{F}(f)$ es el máximo conjunto A para el que la familia $\{f^{\circ n}|_A\}$ es normal. A este conjunto A se le denomina también, el dominio de normalidad para la familia $\{f^{\circ n}\}$.

Lema 4 (Iteración). *Para cualquier $k > 0$, $\mathcal{F}\left(f^{\circ k}\right) = \mathcal{F}(f)$.*

Demostración. Se verá que el dominio de normalidad de la familia $f^{\circ k}$ es igual al dominio de normalidad que f.
Si $z \in \mathcal{F}(f)$, entonces hay una vecindad U de z tal que $\{f^{\circ n}|_U\}$ es una familia normal. En especial, toda sucesión $(f^{\circ m}|_U)_m$ en la familia $\{f^{\circ nk}|_U\}$, es también una sucesión en $\{f^{\circ n}|_U\}$, existiendo así una subsucesión que converge compactamente en U. En consecuencia, $\{f^{\circ nk}|_U\}$ es una familia normal y $z \in \mathcal{F}\left(f^{\circ k}\right)$; es decir, $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}\left(f^{\circ k}\right)$.
Ahora bien, si $z \in \mathcal{F}\left(f^{\circ k}\right)$, entonces existe un abierto U, tal que la familia $\{f^{\circ nk}|_U\}$ es normal. Además,

$$\{f^{\circ n}|_U : n \geq 0\} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \left\{f^{\circ(nk+i)}|_U : n \geq 0\right\}$$

Para $i = 0$, $\left\{f^{\circ(nk+i)}|_U : n \geq 0\right\}$ es una familia normal por lo que se dijo anteriormente, y para $i > 0$ se concluye lo mismo; ya que en la demostración del Lema 1 se probó en términos generales que $\{f^{\circ n}|_U : n \geq 0\}$ es normal si y solo si $\left\{f^{\circ(n+1)}|_U : n \geq 0\right\}$. De esta manera, $\{f^{\circ n}|_U : n \geq 0\}$ es una familia normal y $z \in \mathcal{F}(f)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}\left(f^{\circ k}\right) \subset \mathcal{F}(f)$. □

Definición 5. Una *órbita períodica* o *ciclo* en z_0 es la sucesión de iteraciones sobre f a partir de z_0, para la cual existe $n > 0$ tal que $f^{\circ n}(z_0) = z_0$. Para una función holomorfa f, si $z_n = f^{\circ^n}(z_{n-1})$ y $\{z_1, \ldots, z_m\}$ son distintos, al entero m se le conoce como período. Además se define el multiplicador de la orbita, denotado por λ, a $(f^{\circ m})'$ en un punto de la órbita. La órbita periódica se dice que atrae, repele o es neutral si el multiplicador satisface $|\lambda| < 1$, $|\lambda| > 1$ y $|\lambda| = 1$ respectivamente. Si $\lambda = 0$, la órbita es llamada superatractiva.

A continuación se dará un ejemplo sencillo como aplicación de esta definición.
Sea $p(z)$ un polinomio no constante y $N(z) = z - \dfrac{p(z)}{p'(z)}$. Entonces:

Proposición 6. *Raíces de p son puntos fijos atractivos de N y además cuando la raíz de p es de multiplicidad 1, esta es un punto fijo superatractivo.*

Demostración. Sea z_0 un cero de p de multiplicidad k. Factorizando esa raíz resulta, $p(z) = (z -$

$z_0)^k\overline{p(z)}$ para $\overline{p(z)}$ holomorfa, que no se anula en z_0. Luego,

$$N(z) = z - \frac{(z-z_0)^k\overline{p(z)}}{k(z-z_0)^{k-1}\overline{p(z)} + (z-z_0)^k\overline{p(z)}'} = z - \frac{(z-z_0)\overline{p(z)}}{k\overline{p(z)} + (z-z_0)\overline{p(z)}'}$$

y $N(z_0) = z_0$. Además,

$$N'(z) = \frac{k(k-1)\overline{p(z)}^2 + 2k(z-z_0)\overline{p(z)p(z)}' + (z-z_0)^2\overline{p(z)p(z)}''}{k^2\overline{p(z)}^2 + 2k(z-z_0)\overline{p(z)p(z)}' + (z-z_0)^2\overline{p(z)}'^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} N'(z_0) &= \frac{k(k-1)\overline{p(z_0)}^2 + 2k(z_0-z_0)\overline{p(z_0)p(z_0)}' + (z_0-z_0)^2\overline{p(z_0)p(z_0)}''}{k^2\overline{p(z_0)}^2 + 2k(z_0-z_0)\overline{p(z_0)p(z_0)}' + (z_0-z_0)^2\overline{p(z_0)}'^2} \\ &= \frac{k(k-1)\overline{p(z_0)}^2}{k^2\overline{p(z_0)}^2} = 1 - \frac{1}{k} < 1 \end{aligned}$$

y z_0 es un punto fijo atrayente. Si la multiplicidad de z_0 es 1, entonces $N'(z_0) = 0$ y se convierte en un punto fijo superatractivo. $\square$

El anterior ejemplo es conocido como método de Newton, el cual ayuda a la aproximación de raíces en polinomios. Es así que la aproximación y convergencia hacia los ceros, se convierte dinámicamente en la capacidad de estos puntos de "atraer" a través de iteraciones. No obstante, como es bien sabido del método, se debe escoger muy bien el punto en donde inicia la iteración. Este dilema induce la siguiente definición:

Definición 7. Si $\mathcal{O}$ es una órbita períodica atractiva de periodo m, se define la *cuenca de atracción* como el conjunto abierto $\mathcal{A} \subset C^*$ de todos los puntos $z \in C^*$ para el cual $(f^{\circ nm}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia algún elemento de $\mathcal{O}$.

Teorema 8. *Toda órbita períodica atractiva esta contenida en el conjunto de Fatou, al igual que la cuenca de atracción. Y por el contrario, toda órbita períodica repelente esta contenido en el conjunto de Julia.*

Demostración. Gracias al Lema 4, es suficiente probarlo para un periodo de 1; es decir, donde f tenga un punto fijo. Sea pues, $f(z_0) = z_0$ con multiplicador λ.

a) Si $|\lambda| > 1$, para toda sucesión $((f^{\circ n})'(z_0))_n$, no es posible su convergencia, debido a que $f^{\circ n}(z_0) = \lambda^n$ y $f^{\circ n}(z_0) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Y por teorema de Weierstrass, la sucesión $(f^{\circ n}(z_0))_n$ nunca converge. En consecuencia $z_0 \in \mathcal{J}(f)$.

b) Si $|\lambda| < 1$, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < c < 1$. Entonces $|f(z) - f(z_0)| \leq c|z - z_0|$ y $|f^{\circ n}(z) - f^{\circ n}(z_0)| \leq c^n|z - z_0|$ converge uniformemente sobre una vecindad U de z_0. Por lo tanto, $z_0 \in \mathcal{F}(f)$.

Por último, sea $z \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es la cuenca de atracción sobre cierto punto fijo z_0. Para n lo suficientemente grande, $f^{\circ n}(z) \in U$, siendo U como en la parte b); y sea $V \subset U$ un abierto con $f^n(z) \in V$. Entonces $W := f^{\circ(-n)}(V)$ es una vecindad de z, y $(f^{\circ n}|_W)$ converge uniformemente. Luego, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(f)$. $\square$

Antes del siguiente lema se hará la siguiente observación:
Suponga que f es una función racional no constante, digamos que $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, con p y q de factores distintos y grad(p)= n y grad(q)= m.

a) Si $m = n$, todos los ceros y polos de f están en $\mathbb{C}$.

b) Si $n > m$ entonces f tiene n ceros, m polos en $\mathbb{C}^*$ y $f(\infty) = \infty$. Además el número de polos en ∞ es el número de ceros de $\dfrac{1}{f(1/z)}$ en cero, siendo en total $n - m$.

c) el otro caso, para $m > n$, es análogo a b) y solo cambia que $f(\infty) = 0$.

En conclusión, f tiene igual número de ceros y de polos, que coincide con el grado de f.

Lema 9. *Si* $(f^{\circ n})_n$ *converge uniformemente sobre* $\mathbb{C}^*$ *a una funcion* g*, entonces* g *es racional y para todo* n *suficientemente grande,* $\mathrm{grad}(f^{\circ n}) = \mathrm{grad}(g)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f^{\circ n}(\infty) \neq 0$. Sean $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}$ los ceros de g, $\{D_j\}$ discos, de centro z_j, disjuntos dos a dos y que no contengan ningún polo de g. Si $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_j$, sea $K = \mathbb{C}^* \backslash D$. Como $f^{\circ n} \to g$ uniformemente, para n suficientemente grande, $f^{\circ n}|_{D_j}$ tampoco tiene polos, y por teorema de Hurwitz, $f^{\circ n}$ y g tienen el mismo número de ceros en cada D_j. Por la observación anterior a este lema, $\mathrm{grad}(f^{\circ n}) = \mathrm{grad}(g)$. □

Por ahora, no importa cual sea el grado de la función racional, mientras no sea cero. No obstante, sera necesario también eliminar la posibilidad de que el grado sea 1 para tener resultados más interesantes.

Lema 10. *Si* f *es una función racional de grado 2 o más, entonces el conjunto de Julia no es vacío.*

Demostración. Supongamos que $J(f) = \emptyset$. Entonces $\{f^{\circ n}\}$ es una familia normal sobre $\mathbb{C}^*$ y existe una subsucesión que converge uniformemente a una función racional, esto porque debe converger a una función holomorfa $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Por el Lema 9, grad($f^{\circ n}$)=grad($g$) para n suficientemente grande. Pero esto no es posible ya que grad($f^{\circ n}$)= $d^n \geq 2^n$ y grad($f^{\circ n}$)$\to \infty$ cuando $n \to \infty$. Luego, $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$. □

Definición 11. Se conoce como órbita principal de un punto z, denotado por $\mathrm{GO}(z, f)$, al conjunto que consiste de todos los puntos $z' \in \mathbb{C}^*$ cuyas órbitas eventualmente intersectan la órbita de z. Además un punto $z \in \mathbb{C}^*$ se tiene órbita principal finita o se le conoce como excepcional si la órbita principal es finita. Por otra parte z es un punto crítico de f, si $f'(z) = 0$.

Lema 12. *Si* f *es una función racional de grado* $d \geq 2$*, entonces el conjunto* $\mathcal{E}(f)$ *de puntos con órbita principal finita puede tener máximo dos elementos. Además los puntos deben ser siempre puntos períodicos superatractivos de* f*, por lo que deben pertenecer al conjunto de Fatou.*

Demostración. Por hipótesis y la observación hecha al principio, $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$. Luego, $f(\mathrm{GO}(z, f)) = \mathrm{GO}(z, f)$ y $f|_{\mathrm{GO}(z,f)}$ es inyectiva si z es un punto excepcional de f. De esta manera, $\mathrm{GO}(z, f)$ forma

una única orbita períodica.
Por otra parte, para $w \in \mathbb{C}^*$ la ecuación $f(z) = w$ tiene d soluciones. Esto debido a que

$$f(z) - w = \frac{p(z) - wq(z)}{q(z)}$$

tiene el mismo grado que f y por la observación hecha antes del lema 9, $f(z) - w$ tiene d ceros. Así, z tiene exactamente d pre-imágenes, contadas con multiplicidades. Si la multiplicidad de una pre-imágen de w, z_0 es mayor a uno, este debe ser un punto crítico:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{p'(z_0)q(z_0) - p(z_0)q'(z_0)}{q(z_0)^2} = \frac{p'(z_0) - wq'(z_0)}{q(z_0)} \\ &= \frac{n(z_0 - z_0)^{n-1}\overline{p(z_0)} - (z_0 - z_0)^n \overline{p'(z_0)}}{q(z_0)} = 0 \end{aligned}$$

para $q(z_0) \neq 0$. Por lo que se había obtenido antes, para cada $z_j \in \mathrm{GO}(z, f)$, existe una única pre-imágen z_{j-1} la cual tiene multiplicidad $d \geq 2$. Por el anterior párrafo, todos los z_j son puntos críticos. En consecuencia, el conjunto $\mathcal{E}(f)$ de los puntos excepcionales de f, son todos puntos críticos, es finito y adicionalmente todos sus puntos son superatractivos, por lo que $\mathcal{E}(f) \subset \mathcal{F}(f)$.

Ahora si $\mathcal{E}(f)$ contiene 3 o más puntos, $f(\mathbb{C}^* \backslash \mathcal{E}(f)) \subset \mathcal{C} \backslash \{z_0, z_1, z_2\}$ para ciertos $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, de igual manera para cada $f^{\circ n}$. Por Teorema 1 (Montel), $\{f^{\circ n} 1_{\mathbb{C}^* \backslash \mathcal{E}(f)}\}$ es una familia normal. Entonces $\mathbb{C}^* \backslash \mathcal{E}(f) \in \mathcal{F}(f)$. Pero $\mathcal{E}(f) \in \mathcal{F}(f)$por la primera parte de la prueba. Esto significa que $\mathbb{C}^* = \mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f) = \emptyset$. Lo que contradice al Lema 10. En consecuencia, $\mathcal{E}(f)$ solo puede contener a lo mas dos puntos. □

El siguiente teorema nos va a indicar una primera gran diferencia dinámica entre el conjunto de Fatou y el conjunto Julia. El primero, donde se encuentran todos aquellos puntos y conjuntos de atracción, tiene un comportamiento "estable". Por el contrario, el conjunto de Julia, se caracteriza por ser caótico, cumple con la condición de transitividad, sus órbitas períodicas son densas y es sensible a las condiciones iniciales. En este documento, solo se verá la primera propiedad:

Teorema 13. *Sea z_1 un punto arbitrario de $\mathcal{J}(f)$ y sea N una vecindad de z_1. Entonces la unión U de todas la iteraciones hacia adelante $f^{\circ n}(N)$ contiene al conjunto de Julia y contiene todo menos a lo más dos puntos de $\mathbb{C}^*$. En otras palabras, si N es suficientemente pequeño, entonces U es el complemento $\mathbb{C}^* \backslash \mathcal{E}(f)$.*

Demostración. En primer lugar, dado que $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$, la familia $\{f^{\circ n}|_U\}$ no puede ser normal o de lo contrario $U \subset \mathcal{F}(f)$, una contradicción. Además, como $f(U) \subset U$, por teorema 1 (Montel), cada $f^{\circ n}$ omite a lo mas dos valores de $\mathbb{C}^*$; esto es que $\mathbb{C}^* \backslash U$ tiene a lo más dos elementos. Por otro lado, $f(U) \subset U$ y para todo $z \in \mathbb{C}^* \backslash U$, si $f(w) = z$ entonces $f^{\circ n}(w) \in \mathbb{C}^* \backslash U$. Por lo tanto, $f(\mathbb{C}^* \backslash U) \subset \mathbb{C}^* \backslash U$ y la órbita principal de todo $z \in \mathbb{C}^* \backslash U$ se encuentra contenida en $\mathbb{C}^* \backslash U$ y es finita. Esto implica que $\mathbb{C}^* \backslash U \subset \mathcal{E}(f)$.
Recíprocamente, si $z \in \mathcal{E}(f)$, entonces $\mathrm{GO}(z, f) \subset \mathcal{E}(f)$ y $\mathrm{GO}(z, f) \cap N = \emptyset$ y $z \notin U$. En consecuencia, $U = \mathbb{C}^* \backslash \mathcal{E}(f)$. □

Corolario 14. *Si el conjunto de Julia tiene interior no vacío, entonces $\mathcal{J} = \mathbb{C}^*$.*

Demostración. Sean $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ un punto interior y V un abierto que lo contiene tal que $V \subset \mathcal{J}(f)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{\circ n}(V) \subset \mathcal{J}(f)$ y su unión por el teorema anterior es $\mathbb{C}^* \backslash \mathcal{E}(f)$ que es denso en $\mathbb{C}^*$ y por ser $\mathcal{J}(f)$ cerrado, $\mathcal{J}(f) = \mathbb{C}^*$. □

Corolario 15. *Si $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, entonces el conjunto de todas las preimagenes iteradas*

$$\{z \in \mathbb{C}^* : f^{\circ n}(z) = z_0 \textit{ para algún } n \geq 0\}$$

es denso en todas partes de $\mathcal{J}(f)$.

Demostración. Por Lema 12, $z_0 \notin \mathcal{E}(f)$. Entonces si $z \in \mathcal{J}(f)$, existe un $n \geq 0$ tal que $z \in f^{\circ n}(U)$ para U un abierto que contiene a z. Esto último lo garantiza el Teorema 13 y significa que ese conjunto es denso en $\mathcal{J}(f)$. □

Corolario 16. *Si f tiene grado $d \geq 2$ entonces $\mathcal{J}(f)$ no tiene puntos aislados.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, este existe gracias al Lema 10. Además es infinito, porque de lo contrario, se compone de puntos excepcionales; contradiciéndose con el Lema 12. Por lo tanto, $\mathrm{GO}(z, f)$ es infinito. Como $\mathcal{J}(f)$ es compacto, al ser un conjunto cerrado dentro del conjunto compacto $\mathbb{C}^*$, existe un punto limite $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Por el corolario anterior, el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C}^* : f^{\circ n}(z) = z_0 \text{ para algún } n \geq 0\}$$

es denso en $\mathbb{C}^*$. Por lo tanto, todos los puntos son de acumulación. □

Acotación de Funciones Holomorfas en Regiones no Acotadas

Angela Patricia Vargas Mancipe

En este documento se presentan algunos resultados acerca de la acotación de funciones holomorfas en regiones no acotadas del plano complejo. En relación a esto último se empieza por un teorema que aplica para cualquier región no acotada, seguidamente se da una versión del Teorema de Phragmén-Lindelöf en una banda no acotada y posteriormente se presentan resultados, que se obtienen como consecuencia de dicha versión, para la acotación de funciones holomorfas definidas en semiplanos y en sectores del plano complejo.

Un resultado fundamental, y bien conocido, en relación a la acotación de una función holomorfa definida en una región $U \subseteq \mathbb{C}$, esto es, en un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, es el Principio del Módulo Máximo. Recordemos lo que se establece en este último.

Teorema 1 (Principio del Módulo Máximo). *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces f es constante o para cada $z \in U$ existe $w \in U$ tal que $|f(w)| > |f(z)|$.*

A partir del Principio del Módulo Máximo es posible garantizar que si U es una región acotada, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ es continua en $\overline{U}$ y holomorfa en U, y f está acotada en ∂U por una constante $M > 0$, entonces $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in U$. En efecto, bajo estas condiciones tenemos que $\overline{U}$ es compacto y, por tanto, existe $z_0 \in \overline{U}$ tal que

$$|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{U}} |f(z)|.$$

De hecho, por el Principio del Módulo Máximo se sabe que $z_0 \in \partial U$. Luego,

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \leq M, \;\; z \in U.$$

Por otra parte, si la región U no es acotada y f es como antes, no siempre es posible garantizar que el hecho de que $|f(z)| \leq M$ para $z \in \partial U$ implica que $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in U$. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ el semiplano derecho y sea $\delta > 0$. Es claro que la función $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) := e^{\delta z}, \ z \in \overline{D},$$

es continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Además, se satisface que

$$|f(z)| \leq 1, \ z \in \partial D.$$

Sin embargo, f no es acotada en D. Para ver esto último basta con considerar la sucesión no acotada $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por otra parte, si sabemos que f está acotada en la región U podemos garantizar que $|f(z)| \leq M$ para $z \in U$ siempre que dicha desigualdad sea válida en ∂U. Eso es resultado del siguiente teorema (ver [BN97, Pág 190]).

Teorema 3. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región no acotada y sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa en U y continua en $\overline{U}$. Si existen $M > 0$ y $M' > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leq M, \ z \in \partial U,$$

y

$$|f(z)| \leq M', \ z \in U,$$

entonces $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in U$.

Demostración. El resultado es claramente válido si f es constante en U. En lo que sigue se asume que f no es constante en U.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $M = 1$. Veamos que para cada $z \in U$ se cumple que $|f(z)| \leq 1$. Para ello definamos la función auxiliar $g : \overline{U} \to D$ por

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a, \\ f'(a) & \text{si } z = a, \end{cases}$$

donde a es un punto fijo en U. Dado que f es holomorfa en U y continua en ∂U, tenemos que g es holomorfa en U y continua en ∂U. Además, como

$$\frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} \leq \frac{2\,\text{máx}\{M', 1\}}{|z-a|}, \ z \in \overline{U} \setminus \{a\},$$

se tiene que $\text{lím}_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$ y, por tanto, existe $K > 0$ tal que

$$|g(z)| \leq K, \ z \in \overline{U}.$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $h : \overline{U} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$h(z) := (f(z))^n g(z), \ z \in \overline{U}.$$

Veamos que $|h(z)| \leq K$ para $z \in U$. Como $|h(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, se sabe que existe $r > 0$ tal que $|h(z)| \leq K$ para $z \in \overline{U}$ siempre que $|z| \geq r$. Así, si $R > r$ y $U_R := \{z \in U : |z| \leq R\}$, se satisface que

$$|h(z)| \leq K, \ z \in \partial U_R.$$

Luego, como U_R es acotada, por el Principio del Módulo Máximo se cumple que $|h(z)| \leq K$ para $z \in U_R$. Es claro que para cada $z \in U$ es posible tomar $R > r$ suficientemente grande de modo que $z \in U_R$. Así, $|h(z)| \leq K$ para cada $z \in U$. De esto se sigue

$$|f(z)| \leq \frac{K^{1/n}}{|g(z)|^{1/n}}$$

para $z \in U$ si $g(z) \neq 0$. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ en esta última desigualdad obtenemos que

$$|f(z)| \leq 1 \text{ si } z \in U \text{ y } g(z) \neq 0. \tag{1}$$

Ahora, como f no es constante, por el Principio de Identidad se sabe que los ceros de g forman un conjunto cerrado discreto. Así, por continuidad de f, a partir de (1) obtenemos que $|f(z)| \leq 1$ para cada $z \in U$. □

El teorema anterior es bastante general porque aplica para cualquier región no acotada U. Sin embargo, dependiendo de U y de la función f, puede llegar a ser tedioso garantizar que f en efecto está acotada en U para poder aplicar este teorema. Por otra parte, si nos restringimos a ciertas regiones del plano complejo es posible obtener como resultado la acotación de f en U una vez que sabemos que f está acotada en ∂U y satisface ciertas condiciones de crecimiento en U. El Teorema de Phragmén-Lindelöf establece precisamente que si f es acotada en la frontera de determinado dominio y "crece más lento" que una función dada que depende de la función exponencial, entonces es acotada, de modo que no es necesario asumir la acotación de f en U para obtnener la conclusión del teorema 2.
A continuación se presenta una versión del Teorema de Phragmén-Lindelöf, que ha sido tomada de [Lan99, Pág 366], la cual aplica para la banda vertical no acotada con frontera dada por las rectas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$.

Teorema 4 (Teorema de Phragmén-Lindelöf). *Sea S la banda vertical dada por*

$$S := \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < Re(z) < \pi/2\}$$

y sea $f : \overline{S} \to \mathbb{C}$ holomorfa en S y continua en $\overline{S}$. Supongamos que $|f(z)| \leq 1$ para cada $z \in \partial S$. Si existen $0 < \alpha < 1$ y $C > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq \exp(Ce^{\alpha|z|})$$

para $z \in S$, con $|z|$ suficientemente grande, entonces $|f(z)| \leq 1$ para cada $z \in S$.

Demostración. Sean $\alpha < \beta < 1$ y $\varepsilon > 0$. Sea $g : \overline{S} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$g(z) := f(z)e^{-2\varepsilon \cos{(\beta z)}}, \ z \in \overline{S}.$$

Veamos que $|g(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ para z en la banda S. Notemos que para cada $z \in S$ se satisface la igualdad

$$2\text{Re}(\cos(\beta z)) = (e^{\beta \text{Im}(z)} + e^{-\beta \text{Im}(z)}) \cos(\beta \text{Re}(z)).$$

Como $\beta \in (0,1)$, se sabe que $\cos(\beta x) > 0$ para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Así, existe $m > 0$ tal que $\cos(\beta x) \geq m$ para cada $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ y, por tanto,

$$2\mathrm{Re}(\cos(\beta z)) \geq (e^{\beta \mathrm{Im}(z)} + e^{-\beta \mathrm{Im}(z)})m, \ z \in \overline{S}.$$

Luego, para $z \in S$, con $|z|$ suficientemente grande, tenemos que

$$|g(z)| \leq \exp(Ce^{\alpha|z|} - \varepsilon m(e^{\beta \mathrm{Im}(z)} + e^{-\beta \mathrm{Im}(z)})).$$

Dado que $m > 0$ y $0 < \alpha < \beta$ de esta última desigualdad se sigue que $\lim_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$ para $z \in S$. Esto implica que g está acotada en S. Así, como

$$|g(z)| \leq \exp(-\varepsilon(e^{\beta \mathrm{Im}(z)} + e^{-\beta \mathrm{Im}(z)}) \cos(\pm\pi\beta/2))) \leq e^0 = 1$$

para $z \in \partial S$, por el teorema 2 tenemos que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$. Luego,

$$|f(z)| \leq e^{2\varepsilon \mathrm{Re}(\cos(\beta z))}, \ z \in S.$$

Por lo tanto, para cada $z \in S$ tenemos que $|f(z)| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} e^{2\varepsilon \mathrm{Re}(\cos(\beta z))} = 1$. □

En lo que sigue se asume que el conjunto S es como en el teorema previo.
Notemos que, como lo sugiere el siguiente ejemplo, la conclusión del teorema 3 no es válida para $\alpha = 1$.

Ejemplo 5. Sea $f : \overline{S} \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f(z) := \exp(e^{iz}), \ z \in \overline{S}.$$

Para cada $y \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$f\left(\pm\frac{\pi}{2} + iy\right) = \exp(\pm ie^{-y}).$$

De ahí que $|f(z)| = 1$ para cada $z \in \partial S$. Además, se cumple que

$$|f(z)| = \exp(e^{-\mathrm{Im}(z)} \cos(\mathrm{Re}(z))) \leq \exp(e^{-\mathrm{Im}(z)}) \leq \exp(e^{|z|}), \ z \in S.$$

Pero, f no es acotada en S porque la sucesión $\{|f(-in)|\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada.

El anterior ejemplo indica que la restricción $\alpha < 1$ en el teorema 3 es óptima en el sentido de que el resultado de dicho teorema deja de ser válido para $\alpha \geq 1$.
Por otra parte, si U es una región no acotada y si existe una función continua $\varphi : \overline{S} \to \overline{U}$ tal que $\varphi(\partial S) \subseteq \partial U$ y $\varphi|_S : S \to U$ es biholomorfa, es posible aplicar el Teorema Phragmén-Lindelöf para obtener resultados acerca de la acotación de funciones biholomorfas en U y continuas en $\overline{U}$. En particular, a partir del Teorema del Mapeo de Riemann podemos considerar U como una banda infinita en el plano complejo, y para el caso general de una región simplemente conexa no acotada U estrictamente contenida en $\mathbb{C}$ se debe considerar si es posible extender una función biholomorfa $\varphi : S \to U$, obtenida por aplicación de este teorema, a una función continua que envíe ∂S a un subconjunto de ∂U. Por ejemplo, si U es el semiplano derecho obtenemos el siguiente teorema como consecuencia del Teorema de Phragmén-Lindelöf.

Teorema 6. *Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ el semiplano derecho y sea $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa en D y continua en $\overline{D}$. Supongamos que f está acotada por 1 en el eje imaginario y que existen constantes $C > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tales que*

$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}, \; z \in D,$$

Entonces f está acotada por 1 en D.

Demostración. Sea $\varphi : \overline{S} \to \overline{D}$ la función definida por

$$\varphi(w) := e^{iw}, \; w \in \overline{S}.$$

Notemos que φ es continua, $\varphi(\partial S) = \partial D$ y se satisface que $\varphi|_S : S \to D$ es una función biholomorfa. De esta manera si $h : \overline{S} \to \mathbb{C}$ está dada por $h := f \circ \varphi$, entonces h es continua en $\overline{S}$ y holomorfa en S. También, por lo dicho previamente y por las hipótesis dadas sobre f, tenemos que $|h(w)| \leq 1$ para $w \in \partial S$. Por otra parte, para cada $w \in S$ tenemos que

$$|h(w)| \leq Ce^{|\varphi(w)|^\alpha} \leq C \exp(e^{\alpha|w|}).$$

Además, como $C > 0$, existe $K > 0$ tal que $C = e^K$. De ahí que

$$|h(w)| \leq \exp(e^{\alpha|w|} + K) \leq \exp(C_1 e^{\alpha|w|}),$$

donde $C_1 := (1+K)$, para $w \in S$ con $|w|$ suficientemente grande. Así, por el Teorema de Phragmén-Lindelöf se tiene que $|h(w)| \leq 1$ para $w \in S$. Por lo tanto, para cada $z \in D$ se cumple que $|f(z)| = |h(\varphi^{-1}(z))| \leq 1$. □

El ejemplo 1 muestra que tampoco podemos asumir que $\alpha = 1$ en el anterior teorema. Por otro lado, como consecuencia inmediata de este teorema obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 7. *Sea H un semiplano abierto en $\mathbb{C}$ y sea $g : \overline{H} \to \mathbb{C}$ holomorfa en H y continua en $\overline{H}$. Supongamos que $|g(z)| \leq 1$ para $z \in \partial H$ y que existen constantes $C > 0$ y $\alpha < 1$ tales que*

$$|g(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}, \; z \in H,$$

Entonces $|g(z)| \leq 1$ para $z \in H$.

Demostración. Dado que H es un semiplano abierto en $\mathbb{C}$, existe $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ tal que para la función $\varphi : \overline{D} \to \overline{H}$, definida por $\varphi(z) := i^k z$ para $z \in \overline{D}$, se satisface que φ es continua, $\varphi(\partial D) = \partial H$ y $\varphi|_D : D \to H$ es biholomorfa. Así, es suficiente aplicar el teorema 4 a la función $f := g \circ \varphi$. □

Por último, tenemos el siguente teorema para sectores en el plano complejo, esto es, para regiones que son interiores a dos rayos con punto incial en el origen. De manera más precisa decimos que un sector es un conjunto de la forma $\{z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ para $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ y decimos que $\theta_2 - \theta_1$ es el ángulo del sector.

Teorema 8. *Sea U un sector abierto entre dos rayos que inician en el origen y sea $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{U}$ y holomorfa en U. Sea π/β el ángulo del sector U. Supongamos que $|f(z)| \leq 1$ para $z \in \partial U$. Si existen $C > 0$ y $0 < \alpha < \beta$ tales que*

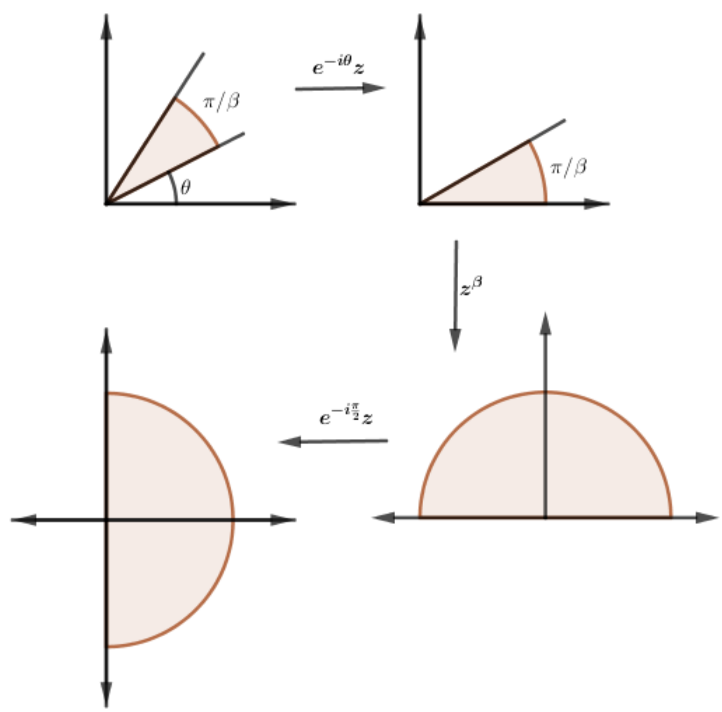
$$|f(z)| \leq Ce^{|z|^\alpha}, \ z \in U,$$

entonces f está acotada por 1 en U.

Demostración. Sea D el semiplano derecho. Supongamos que los dos rayos r_1 y r_2 de ∂U forman un ángulo de θ y $\theta + \pi/\beta$ con el eje real positivo, respectivamente. Notemos que $\psi : \overline{U} \to \overline{D}$, definida por

$$\psi(z) := e^{-i\pi/2}(e^{-i\theta}z)^\beta, z \in U,$$

es un homeomorfismo. Podemos ver ψ gráficamente como una composición de tres funciones como se indica en la siguiente imagen.



Ahora, si $g := f \circ \psi^{-1}$, entonces g es continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D. Además, dado que de la definición de ψ se sigue que

$$|\psi^{-1}(z)| = |z|^{1/\beta}$$

para cada $z \in D$, tenemos que

$$|g(z)| \leq Ce^{|z|^{\alpha/\beta}}, \ z \in D,$$

con $\alpha/\beta < 1$. También tenemos que $|g(iy)| \leq 1$ para $y \in \mathbb{R}$ porque $|f(z)| \leq 1$ en los rayos del sector U. Así, por el teorema 4 tenemos que $|g(z)| \leq 1$ para $z \in D$.
Por lo tanto, $|f(z)| = |g(\psi(z))| \leq 1$ para cada $z \in U$. □

Bibliografía

Bibliografía

[Ax68] James Ax. The elementary theory of finite fields. *Annals of Mathematics*, pages 239–271, 1968.

[BN97] J. Bak and D. Newman. *Complex Analysis*. Springer, New York, second edition, 1997.

[Bor69] Armand Borel. Injective endomorphisms of algebraic varieties. *Archiv der Mathematik*, 20(5):531–537, 1969.

[CG93] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[Cha04] Kevin Timothy Chan. *Uniformization of Riemann surfaces*. PhD thesis, Harvard University, 2004.

[CK90] Chen Chung Chang and H Jerome Keisler. *Model theory*, volume 73. Elsevier, 1990.

[For12] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81. Springer Science & Business Media, 2012.

[Gro61] Alexander Grothendieck. Eléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de jean dieudonné): Iii. etude cohomologique des faisceaux cohérents, premiere partie. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 11:5–167, 1961.

[Lan99] S. Lang. *Complex Analysis*. Springer, New York, fourth edition, 1999.

[Mar00] Stefano Marmi. An introduction to small divisors. 2000.

[McM] C McMullen. Complex analysis on riemann surfaces. *Lecture Notes, Harward University. http://www. math. harvard. edu/ctm/papers/home/text/class/harvard/213b/course/course. pdf.*

[Mil06] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.

[Moe02] Ieke Moerdijk. Introduction to the language of stacks and gerbes. *arXiv preprint math/0212266*, 2002.

[Tao09] Terence Tao. Infinite fields, finite fields, and the Ax-Grothendieck theorem. *URL: http://terrytao.wordpress.com/2009/03/07/infinite-fields-finite-fieldsand-the-ax-grothendieck-theorem/*, 2009.

Proyectos y Horario

Proyectos

Bermúdez Daniel	Introducción a las superficies de Riemann y su clasificación
Betancourt Nicolás	Cayley-Hamilton
Campo Mateo	Diagonalización de matrices
Cruz Jose Miguel	Función universal
Cuervo Nicolás	El teorema de Axe-Grothendieck
Estupiñan Santiago	Teoremas básicos de Funciones Elípticas
Herrera Iván	
Moreno Javier	Teorema de Picard
Pallejá Daniel	Estabilidad y Linealización de funciones analíticas
Patiño Andrés Felipe	Hilbert spaces of holomorphic functions
Peréz Juan Martín	Uniformization of Riemann surfaces
Peréz Camilo	Conjuntos de Julia y de Fatou en funciones racionales
Rueda Felipe	
Suarez Luis Carlos	Cálculo funcional para operadores cerrados
Tobar Germán	Espacios de Hardy
Vargas Ángela	Teorema de Phragmén-Lindelöff

Fechas

Bermúdez Daniel	01.12.2018, 4
Betancourt Nicolás	03.12.2018, 1
Campo Mateo	07.12.2018, 7
Cruz Jose Miguel	07.12.2018, 2
Cuervo Nicolás	07.12.2018, 1
Estupiñan Santiago	01.12.2018, 5
Moreno Javier	01.12.2018, 2
Pallejá Daniel	01.12.2018, 1
Patiño Andrés Felipe	07.12.2018, 5
Peréz Juan Martín	07.12.2018, 4
Peréz Camilo	03.12.2018, 2
Suarez Luis Carlos	03.12.2018, 5
Tobar Germán	01.12.2018, 3
Vargas Ángela	07.12.2018, 3

Pallejá Daniel	01.12., 14:00
Moreno Javier	01.12., 14:35
Tobar Germán	01.12., 15:10
Bermúdez Daniel	01.12., 15:45
Estupiñan Santiago	01.12., 15:55

Betancourt Nicolás	03.12., 08:00
Peréz Camilo	03.12., 08:35
Suarez Luis Carlos	03.12., 09:10

Campo Mateo	07.12., 1
Cuervo Nicolás	07.12., 2
Cruz Jose Miguel	07.12., 3
Vargas Ángela	07.12., 4
Peréz Juan Martín	07.12., 5
Patiño Andrés Felipe	07.12., 6