

Análisis complejo

Taller 7

Teorema de Cauchy; residuos.

Fecha de entrega: 12 de octubre de 2018

1. Sea $R = \frac{P}{Q}$ con polinomios P y Q tal que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$. Muestre que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r R(x) dx$ existe y exprese este límite en términos de los residuos de R .

2. Calcule las siguientes integrales con métodos de análisis complejo:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13} dx, \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx, \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea γ_n el borde del rectángulo con esquinas $n + \frac{1}{2} + in$, $-n - \frac{1}{2} + in$, $-n - \frac{1}{2} - in$, $n + \frac{1}{2} - in$. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(a) Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z + a)^2} dz = 0$.

(b) Demuestre que $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n + a)^2}$.

4. Sean $b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $k, n \in \mathbb{N}$ con $0 < k < n$. Defina $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = z^n + bz^k + c$.

- (a) Suponga que $|z^n| > |bz^k + c|$ para todo z con $|z| = R$ y $|c| > |z^n + bz^k|$ para todo z con $|z| = r$. Muestre que todos los ceros de P pertenecen a $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.

- (b) Determine el número de los ceros (contado con multiplicidad) de:

(i) $P_1(z) := z^8 - 3z^2 + 1$ en $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,

(ii) $P_2(z) := z^7 - 5z^3 + 7$ en $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,

(iii) $P_3(z) := 3z^4 - 7z + 2$ en $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3/2\}$.