Universidad de los Andes, MATE-3210, MATE-4210

# Análisis complejo

Taller 7

Teorema de Cauchy; residuos. Fecha de entrega: 28 de septiembre de 2018

---

1. Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto finito y sea $f : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C}$ holomorfa.
   (a) Muestre que $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ es holomorfa en $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.
   (b) Muestre que $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{c \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_c f$.
   (c) Calcule $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{5z^6 + 4}{2z^7 + 1}\, \mathrm{d}z$.

2. Determine todos los valores que puede tomar $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\, \mathrm{d}z$ si $\gamma$ es un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$.

3. Sea $\gamma = \partial(B_2(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\})$. Calcule las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(\sin z)^2 \cos z}\, \mathrm{d}z, \qquad\qquad (b) \quad \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2 + 1}\, \mathrm{d}z.$$

4. (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región, $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f$ meromorfa en $U$ con zeros en $z_1, \dots, z_n$ y polos en $p_1, \dots, p_k$. Sea $\gamma$ una curva cerrada homotópicamente nula en $U$ y suponga que $\gamma \cap \{z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_k\} = \emptyset$. Demuestre que

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n g(z_j) \operatorname{ord}(f, z_j) \operatorname{ind}_\gamma(z_j) - \sum_{j=1}^k g(p_j) \operatorname{ord}(f, p_j) \operatorname{ind}_\gamma(p_j).$$

   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, sean $p \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tal que $\overline{B_R(p)} \subset U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y suponga que $f|_{B_R(p)}$ es inyectiva. Sea $V := \{f(z) : z \in B_R(p)\}$. Entonces $f^{-1} : V \to B_R(p)$ está bien definida. Demuestre que

$$f^{-1}(q) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_R(p)} \frac{z f'(z)}{f(z) - q}\, \mathrm{d}z, \qquad q \in V.$$

5. **(Para código 4)** Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Suponga que para todo $a \in \mathbb{C}$, por lo menos un coeficiente en la serie de Taylor de $f$ en $a$ se anula. Muestre que $f$ es un polinomio.