

Análisis complejo

Taller 3

Teorema de Cauchy y sus corolarios.

Fecha de entrega: 31 de agosto de 2018

1. (a) Calcule $\oint_{|z-1|=2} z^n \sin(z) dz$ para $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Para $n \in \mathbb{N}_0$ demuestre que

$$\int_{|z+2i|=3} \frac{1}{(z^2 + \pi^2)^{n+1}} dz = \frac{-(2n)!}{(n!)^2} (2\pi)^{-2n}.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existen $M, r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| < M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r$. Muestre que f es un polinomio de grado a lo más n .

Observe que el caso $n = 0$ es el teorema de Liouville.

3. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera.

(a) Muestre que el rango de f es denso en \mathbb{C} o f es constante.

(b) Suponga que $\operatorname{Re}(f)$ es acotada. Demuestre que f es constante.

4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in U$ y $R > 0$ tal que $B_R(z_0) \subseteq U$. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ centrada a z_0 . Para $0 < r < R$ defina $M(r) := \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

(a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $0 < r < R$

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt.$$

(b) Demuestre que para todo $0 < r < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt \leq M(r)^2.$$