Análisis complejo

Taller 1

Funciones holomorfas.

Fecha de entrega: 17 de agosto de 2018

---

1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Demuestre que U es conexo si y solo si es camino-conexo.

2. (a) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $\overline{z}w \neq 1$ y $|z| \leq 1$ y $|w| \leq 1$. Demuestre que

$$\left| \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \right| \leq 1$$

con igualdad si y solo si $|z| = 1$ o $|w| = 1$.

(b) Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{C}$. Para $w \in \mathbb{D}$ fijo defina

$$F(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \qquad \text{para } z \in \mathbb{C} \ \text{ con } \ \overline{w}z \neq 1.$$

Demuestre:

(i) F es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

(ii) $F(0) = w$ y $F(w) = 0$.

(iii) $|F(z)| = 1$ para $|z| = 1$.

(iv) $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es biyectiva.

3. Sea $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Demuestre que $\Phi : \mathbb{D} \to U$, $\Phi(z) = \mathrm{i}\, \dfrac{1 - z}{1 + z}$ es una biyección y calcule su inversa.

4. Sea $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y sea $\Psi(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ fijos.

(a) Suponga que $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ con $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Demuestre que $\Psi : U \to U$ es una biyección.

(b) Suponga que $\Psi : U \to U$ es una biyección. Demuestre que los números $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se pueden escoger en $\mathbb{R}$.