Números de Bernoulli y su Relación con la Función Zeta de Riemann

Juan Camilo Torres Chaves

Mayo 19 de 2016

Resumen

Introducimos los números de Bernoulli y demostramos algunas de sus propiedades más importantes. Usamos estos para encontrar las series de Taylor alrededor de 0 de las funciones $z \cot z$ y $\tan z$. Introducimos la función Zeta de Riemann y hallamos los valores que toma en argumentos pares positivos en términos de los números de Bernoulli. Finalmente demostramos la fórmula de Sumación de Euler-Maclaurin y usamos esta para extender analíticamente la función Zeta de Riemann a los $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

1. Números de Bernoulli

Sea $t \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(z) = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1},$$

la cual tiene una singularidad removible en $z = 0$ ($\lim_{z\to 0} f(z) = 1$ por la Regla de L'Hôpital). Por lo tanto la función

$$g(z) := \begin{cases} \frac{ze^{tz}}{e^z-1}, & \text{si } z \neq 2\pi ik,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ 1, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\pi\}$. Sea

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n,\ |z| < 2\pi$$

($B_n(t) := g^{(n)}(0)$). Los $B_n(t)$'s son polinomios en t (demostraremos esto a continuación) y son llamados polinomios de Bernoulli, y los $B_n := B_n(0)$ son llamados números de Bernoulli. Por simplicidad denotaremos a g como $\frac{ze^{tz}}{e^z-1}$ y siempre que trabajemos con su serie de Taylor alrededor de 0 supondremos que $|z| < 2\pi$.

Proposición 1. *Los números de Bernoulli satisfacen la fórmula de recurrencia $B_0 = 1$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} = 0$$

para $n \geq 1$, de donde es claro que los números de Bernoulli son racionales.

Demostración. Como

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

entonces

$$1 = \frac{e^z - 1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k+1)!} z^n.$$

Igualando coeficientes obtenemos el resultado buscado. $\square$

Con ayuda de la fórmula de recurrencia, podemos hallar los primeros números de Bernoulli: $B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_3 = 0, \ldots$. El siguiente resultado expresa los polinomios de Bernoulli en términos de los números de Bernoulli.

Proposición 2.

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k},$$

de donde es claro que $B_n(t)$ es un polinomio en t con coeficientes racionales.

Demostración. Vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n = \left(\frac{z}{e^z - 1} \right) e^{tz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k} \right) z^n.$$

Comparando coeficientes obtenemos el resultado buscado. $\square$

Con ayuda de esta fórmula podemos hallar los primeros polinomios de Bernoulli: $B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \ldots$

Proposición 3. *Si n es impar y $n \neq 1$, entonces $B_n = 0$.*

Demostración. Como

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

entonces

$$z \left(\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2} \right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Si demostramos que $z \left(\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2} \right)$ es una función par, entonces $B_n = 0$ para n impar y $n \neq 1$. En efecto,

$$z \left(\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{2} \right) = z \left[\frac{2 + e^z - 1}{2(e^z - 1)} \right] = \frac{z}{2} \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \right)$$

de donde es claro que esta función es par. $\square$

Proposición 4. $B_n(t + 1) = B_n(t) + nt^{n-1}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración. Tenemos que

$$\frac{ze^{(t+1)z}}{e^z - 1} - \frac{ze^{tz}}{e^z - 1} = ze^{tz}.$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t + 1) - B_n(t)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n - 1)!} z^n.$$

Por lo tanto, para $n \in \mathbb{Z}^+$, $\frac{B_n(t+1) - B_n(t)}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ y $B_n(t + 1) - B_n(t) = nt^{n-1}$. $\square$

Corolario 5. $B_n(1) = B_n$ *para* $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

Usando la proposición anterior, observamos que para $s \in \mathbb{N}$

$$n^s = \frac{1}{s + 1} \left[B_{s+1}(n + 1) - B_{s+1}(n) \right] \text{ y } \sum_{n=M}^{N} n^s = \frac{1}{s + 1} \left[B_{s+1}(N + 1) - B_{s+1}(M) \right].$$

Proposición 6. $B'_{n+1}(t) = (n+1)B_n(t), n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como

$$B_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k t^{n+1-k},$$

entonces

$$B'_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} B_k t^{n-k} = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k} = (n+1)B_n(t).$$

□

2. La series de Taylor de $z \cot z$ y $\tan z$ alrededor de 0:

Proposición 7.

a)

$$z \cot z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \ |z| < \pi.$$

b)

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \ |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Demostración.

a) En la demostración de la proposición 3 vimos que

$$\frac{z}{2}\left(\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \ |z| < 2\pi.$$

Luego si $|z| < \pi$, entonces $|2iz| < 2\pi$ y se tiene que

$$\begin{aligned} z \cot z &= iz\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right) = \frac{2iz}{2}\left(\frac{e^{2iz/2}+e^{-2iz/2}}{e^{2iz/2}-e^{-2iz/2}}\right) \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2iz)^{2n} \quad \text{por proposición 3} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

b) Como $\cot 2z = \frac{1-\tan^2 z}{2\tan z} = \frac{1}{2}\cot z - \frac{1}{2}\tan z$, entonces, para $|z| < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} z \tan z &= z \cot z - 2z \cot 2z \\ &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}\right) - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-2^{2n}) 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

□

3. La Función Zeta de Riemann

La función Zeta de Riemann viene dada por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($n^s := e^{s \ln n}$) donde ln denota el logaritmo natural). Esta función está definida para $\operatorname{Re} s > 1$, pues para estos valores la serie converge. En efecto, sabemos que las p-series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbb{R}$) convergen para $p > 1$ (criterio de la integral o teorema de Condensación de Cauchy); como

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = |e^{-s \ln n}| = e^{-(\operatorname{Re} s) \ln n} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}},$$

es claro que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge si $\operatorname{Re} s > 1$. Para ver que la función ζ es holomorfa en $D := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$, basta ver que la sucesión de funciones holomorfas $(S_N)_{N \in \mathbb{Z}^+}$, donde $S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$, $s \in D$, es localmente acotada. Esto se tiene ya que si $s \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1 + \varepsilon\}$ donde $\varepsilon > 0$,

$$|S_N(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} |\frac{1}{n^s}| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Proposición 8. *Para $k \in \mathbb{Z}^+$,*

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}.$$

Demostración. Sabemos que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

para $z \notin \mathbb{Z}$. Para z lo suficientemente pequeño y no nulo,

$$\frac{z}{z^2 - n^2} = \frac{-z}{n^2(1 - z^2/n^2)} = -\frac{z}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{n^{2(k+1)}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{n^{2k}},$$

y por lo tanto

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^{2k-1}}{n^{2k}}.$$

Se tiene entonces que

$$\pi \cot \pi z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^{2k}}{n^{2k}} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^{2k}}{n^{2k}}. \qquad (*)$$

para z lo suficientemente pequeño. Para justificar el intercambio de las sumas, observamos que este es posible si z también es un número real no-negativo (Teorema de Tonelli). La serie de potencias que aparece en $(*)$ entonces tiene radio de convergencia no nulo y define una función holomorfa en una vecindad de 0. El principio de la identidad nos asegura entonces la igualdad. También sabemos que para z lo suficientemente pequeño

$$\pi z \cot \pi z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{2n},$$

luego

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \text{ y } \zeta(2k) = \frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}.$$

□

Corolario 9. *La sucesión $B_2, B_4, B_6, B_8, \ldots$ es alternante.*

Demostración. Esto se debe a la fórmula anterior y a que $\zeta(2k)$ es positivo para $k \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Corolario 10. $(-1)^n B_n = B_n$ *para* $n \geq 2$.

Con la fórmula anterior podemos ver que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \ldots$

4. La Fórmula de Sumación de Euler-Maclaurin

Proposición 11 (Fórmula de Sumación de Euler-Maclaurin)**.** *Sean $M, N \in \mathbb{Z}$ con $M \leq N$ y $f : [M, N] \to \mathbb{C}$ tal que $f \in C^k([M, N])$. Entonces,*

$$\sum_{n=M}^{N} f(n) = \int_M^N f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(M) + f(N)] + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!}\left[f^j(N) - f^j(M)\right]$$
$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_M^N f^k(x) B_k(x - \lfloor x \rfloor)\,dx.$$

Demostración. Probaremos primero el caso en el que $M = 0$ y $N = 1$. Usando que $B_1(x) = x - 1/2$, $B_1'(x) = 1$, proposición 6, corolarios 5 y 10 e integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x) B_1'(x)\,dx = f(x)B_1(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)B_2'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{1}{2}f'(x)B_2(x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)B_2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{B_2}{2}[f'(1) - f'(0)] + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)B_2(x)\,dx \\
&\ \vdots \\
&= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j B_{j+1}}{(j+1)!}\left[f^{(j)}(1) - f^{(j)}(0)\right] + \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 f^{(k)}(x)B_k(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!}\left[f^{(j)}(1) - f^{(j)}(0)\right] - \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 f^{(k)}(x)B_k(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Pasando a restar los dos últimos términos y sumando $\frac{1}{2}[f(1) + f(0)]$ a ambos lados, obtenemos el resultado deseado. Para el caso general, aplicamos el caso especial para la función $f(x + n)$ (n fijo) para obtener

$$f(n+1) + f(n) = \int_0^1 f(x+n)\,dx + \frac{1}{2}[f(n+1) + f(n)] + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{B_{j+1}}{(j+1)!}\left[f^{(j)}(n+1) - f^{(j)}(n)\right]$$
$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^1 f^{(k)}(x+n)B_k(x)\,dx. \qquad (**)$$

Por un lado

$$\int_0^1 f(x+n)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

y por el otro

$$\int_0^1 f^{(k)}(x+n)B_k(x)\,dx = \int_n^{n+1} f^{(k)}(x)B_k(x-n)\,dx = \int_n^{n+1} f^{(k)}(x)B_k(x-\lfloor x\rfloor)\,dx.$$

El resultado general se obtiene de $(**)$, sumando de $n=M$ a $n=N-1$. $\square$

Aplicando está fórmula a la serie $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$, $s\neq 1$, y observando que para $f(x)=x^{-s}$,

$$f^{(j)}(x) = (-s)(-s-1)\cdots(-s-j+1)x^{-s-j} = (-1)^j s(s-1)\cdots(s+j-1)x^{-s-j}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} =& \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{N^{s-1}-1}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N^s}\right)\\ &+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{j+1}}{(j+1)!}(-1)^j s(s+1)\cdots(s+j-1)\left(\frac{1}{N^{s+j}-1}\right)\\ &-\frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{k!}\int_1^N x^{-s-k}B_k(x-\lfloor x\rfloor)\,dx.\end{aligned}$$

Para $s\neq 1$ tal que $\operatorname{Re} s>1$, hacemos $N\to\infty$ obteniendo que

$$\begin{aligned}\zeta(s) =& \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{B_{j+1}}{(j+1)!}s(s+1)\cdots(s+j-1)\\ &-\frac{s(s+1)\cdots(s+k-1)}{k!}\int_1^\infty x^{-s-k}B_k(x-\lfloor x\rfloor)\,dx. \qquad (***)\end{aligned}$$

Sin embargo la última integral converge para $\operatorname{Re} s>1-k$ ($\int_1^\infty x^{-s-k}\,dx$ converge absolutamente y $B_k(x-\lfloor x\rfloor)$ es acotada por ser continua y periódica), por lo cual el lado derecho de $(***)$ da la extensión analítica de ζ al conjunto $\{s\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} s>1-k, s\neq 1\}$. Como k es arbitrario, tenemos que la función ζ tiene una extensión analítica a $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Referencias

[1] T. Arakawa, T. Ibukiyama y M. Kaneko. *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*. Springer. 2014.

[2] W. Fischer y I. Lieb. *A Course in Complex Analysis. From Basic Results to Advanced Topics.* Vieweg+Teubner. 2012.

[3] Z.X. Wang y D.R. Guo. *Special Functions*. World Scientific. 1989.