Superficies de Riemann

Proyecto Final - Análisis Complejo

Presentado por : Luis Germán Polanco

18 de Mayo de 2016

1. Definiciones básicas

Definición 1.1. Sea X un espacio topológico. Una **carta compleja** o una **carta** (U, ϕ) en X es un homeomorfismo $\phi : U \to V$, para abiertos $U \subset X$ y $V \subset \mathbb{C}$.

Decimos que la carta esta **centrada** en $p \in M$ si $\phi(p) = 0$.

Note que el inverso de ϕ puede entenderse como una parametrización local del abierto $U \subset X$.

Definición 1.2. Dadas dos cartas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ de X, decimos que estas son **compatibles** si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ o

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

es holomorfa.

Ejemplo 1. Considere $S^2 = \left\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. Y defina la proyección estereográfica ilustrada en la Figura 1 $\phi_1 : U_1 \subset S^2 \to \mathbb{C}$ en $U_1 = S^2 \setminus (0, 0, 1)$ dada por $\phi_1(x, y, z) = \dfrac{x}{1-z} + i\dfrac{y}{1-z}$.

Claramente tenemos que $\phi_1(U_1) = \mathbb{C}$ y podemos definir su inversa $\phi_1^{-1} : \mathbb{C} \to U_1$ fácilmente como

$$\phi_1^{-1}(z) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\right).$$

Es fácil verificar que estas son efectivamente inversas. Así mismo podemos definir $\phi_2 : U_2 \subset S^2 \to \mathbb{C}$, para $U_2 = S^2 \setminus (0, 0, -1)$ como

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{x}{1+z} - i\frac{y}{1+z}$$

cuya inversa esta dada por

$$\phi_2^{-1}(z) = \left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{-2\mathrm{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2}\right).$$

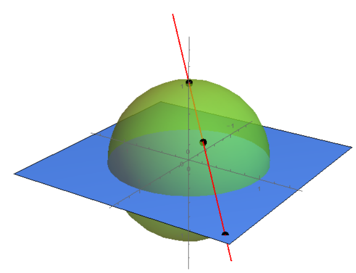

Figura 1: Proyección estereográfica

Ahora consideremos la función de transición $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$, note que $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y tenemos

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = \phi_2\left(\frac{2\mathrm{Re}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\mathrm{Im}(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\right) = \frac{\frac{2\mathrm{Re}(z)}{1 + |z|^2}}{\frac{2|z|^2}{1 + |z|^2}} - i\frac{\frac{2\mathrm{Im}(z)}{1 + |z|^2}}{\frac{2|z|^2}{1 + |z|^2}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Análogamente $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(z) = 1/z$ y por tanto las dos funciones de transición son holomorfas en su dominio y por tanto estas cartas son compatibles.

Definición 1.3. Un **atlas** complejo sobre X es una colección de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \phi_\alpha \to \mathbb{C}\}$ compatibles dos a dos tales que $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Ejemplo 2. En el Ejemplo 1 las cartas dadas forma un atlas complejo de S^2.

Definición 1.4. Dos atlas complejos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen **equivalentes** si cada carta en $\mathcal{A}$ es compatible con cada carta en $\mathcal{B}$.

Lema 1.1. *Dado un espacio topológico X. Cada atlas $\mathcal{A}$ sobre X esta contenido en un único atlas maximál.*

Demostración. (Lemma 1.10 [Lee03]) Sea $\overline{\mathcal{A}}$ el conjunto de todas las cartas compatibles con cada carta en $\mathcal{A}$. Vamos a ver que $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas, para ello debemos verificar que cualesquier cartas en $\overline{\mathcal{A}}$ son compatibles.

Tome cartas (U, ϕ), (V, ψ) en $\overline{\mathcal{A}}$ y veamos que $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ es holomorfa; tome entonces $z \in \psi(U \cap V)$ y por tanto existe $x \in U \cap V \subset X$ tal que $\psi(x) = z$.

Como $\mathcal{A}$ es atlas de X entonces existe una carta (W, θ) tal que $x \in W$. Por definición de $\overline{\mathcal{A}}$ tenemos que (U, ϕ) y (V, ψ) son compatibles con (W, θ). Entonces $\phi \circ \theta^{-1}$ y $\theta \circ \psi^{-1}$ son holomorfas en $\theta(U \cap V \cap W) \subset \theta(U \cap W)$ y $\psi(U \cap V \cap W) \subset \psi(V \cap W)$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
& \theta(U\cap V\cap W) \arrow[ddr, bend left, "\phi\theta^{-1}"] & \\
& U\cap V\cap W \arrow[u, "\theta"'] \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
\psi(U\cap V\cap W) \arrow[uur, bend left, "\theta\psi^{-1}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\phi\psi^{-1}"'] & & \phi(U\cap V\cap W)
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior vemos que $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V \cap W) \to \phi(U \cap V \cap W)$ se escribe como composición de funciones holomorfas. Por tanto $\phi \circ \psi^{-1}$ es holomorfa en una vecindad de $z = \psi(x)$. Entonces $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas en X.

Para verificar que es maximál, simplemente note que un argumento similar al anterior muestra que la compatibilidad de cartas es una relación transitiva. Y por tanto, cualquier carta que sea compatible con todas las cartas de $\overline{\mathcal{A}}$ es compatible con todas las caras en $\mathcal{A}$ y por tanto debe estar contenida en $\overline{\mathcal{A}}$.

Finalmente, si existiera otro atlas maximál $\mathcal{B}$ que contenga a $\mathcal{A}$, todas las cartas en $\mathcal{B}$ deben ser compatibles con todas las cartas en $\mathcal{A}$ y por tanto $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$ y por maximalidad $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

Definición 1.5. Una **superficie de Riemann** es un espacio topológico X Hausdorff y segundo contable junto con un atlas complejo (también llamada estructura compleja).

Ejemplo 3. S^2 con el atlas descrito en el ejemplo 1 es una superficie de Riemann.

2. Ejemplos

Ejemplo 4 (Linea proyectiva compleja $\mathbb{CP}^1$)**.** (Cápitulo 1 [Mir95]) Definimos $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \sim$ donde $(z_1, w_1) \sim (z_2, w_2)$ si y solo si $(z_1, w_1) = \lambda(z_2, w_2)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denotaremos por $[z : w]$ a cada clase de equivalencia.

Note que $[z : w] = \operatorname{span}(z, w)$, así pues cada punto en $\mathbb{CP}^1$ puede escribirse como $[z : w]$ para $z \neq 0$ o $w \neq 0$. Vamos a usar esta observación para cubrir $\mathbb{CP}^1$ con dos abiertos $U_0 = \{[z : w] \mid z \neq 0\}$ y $U_1 = \{[z, w] \mid w \neq 0\}$.

Defina los homeomorfismos $\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C}$ como $\phi_0([z : w]) = w/z$ y $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ como $\phi_1([z : w]) = z/w$; los inversos de estos mapas están dados por $\phi_0^{-1}(\lambda) = [1 : \lambda]$ y $\phi_1^{-1}(\lambda) = [\lambda : 1]$. Para verificar que sean inversos es importante notar que $[z : w] = [1 : w/z]$ si $z \neq 0$ pues $(z, w) = z(1, w/z) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ y $z \in \mathbb{C}^*$.

Ahora bien, tenemos que $\phi_0(U_1 \cap U_2) = \phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Y si calculamos las funciones de transición $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(\lambda) = \phi_1([1 : \lambda]) = 1/\lambda$ la cual claramente es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Debemos verificar que $\mathbb{CP}^1$ sea efectivamente segundo contable y Hausdorff. Primero considere el mapa cociente $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ que por definición es abierto y por tanto envía la base contable de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ en una base contable para $\mathbb{CP}^1$.

Tome $p, q \in \mathbb{CP}^1$, si $p, q \in U_0$ los podemos separar con abiertos pues U_0 es Hausdorff (pues es homeomorfo a $\mathbb{C}$). Análogamente esto es cierto si $p, q \in U_1$. Solo resta ver que pasa si $p \in U_0 \setminus U_1$ y $q \in U_1 \setminus U_0$, esto implica que $p = [1 : 0]$ y $q = [0 : 1]$. Claramente $p \in \phi_0^{-1}(B_1(0))$ y $q \in \phi_1^{-1}(B_1(0))$. Si existiera $r \in \phi_0^{-1}(B_1(0)) \cap \phi_1^{-1}(B_1(0))$ entonces existen $a, b \in B_1(0)$ tales que $\phi_0^{-1}(a)Rr = \phi_1^{-1}(b)$. Esto implica que $\phi_1(\phi_0^{-1})(a) = b$ entonces $b = 1/a$. Pero esto contradice que $a, b \in B_1(0)$. Entonces $\mathbb{CP}^1$ es Hausdorff y por tanto es una superficie de Riemann.

Ejemplo 5 (Toro complejo)**.** Fije $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ que sean $\mathbb{R}$-linealmente independientes. Y defina el latice

$$L = \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} =: \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2.$$

Claramente L es un subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$ y por tanto podemos considerar $X = \mathbb{C}/L$ y dotarlo con la topología cociente, i.e. la inducida por el mapa $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$. Es fácil ver que con esta topología π es un mapa abierto.

Tome $V \subset \mathbb{C}$ abierto y queremos ver que $\pi(V)$ es abierto en X; esto es equivalente a ver que $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto en $\mathbb{C}$. Claramente

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{v \in V} v + L\right) = \bigcup_{v \in V} \pi^{-1}(v + L) = \bigcup_{v \in V}\left(\bigcup_{l \in L} v + l\right) = \bigcup_{l \in L} l + V.$$

Como la suma es un homeomorfismo de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, entonces $l + V$ es abierto y por tanto $\pi^{-1}(\pi(V))$ es abierto.

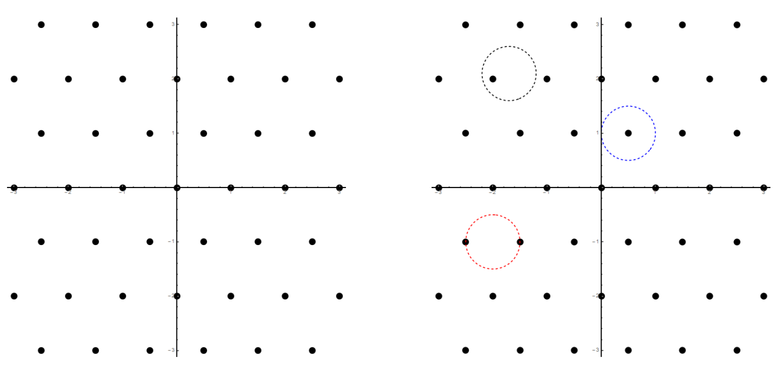

Figura 2: Latice generado por 1, $1/2 + i$ en $\mathbb{C}$.

En la Figura 2 se muestra $L \subset \mathbb{C}$, es claro que L es discreto y por tanto podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que para cada $z \in \mathbb{C}$ el disco $D_z = B_\epsilon(z_0)$ no contenga más de un punto de L. Ahora bien si consideramos la restricción $\pi|_{D_z} : D_z \to \pi(D_z)$ es claramente sobreyectiva, continua y abierta (pues π lo es) y por escogencia de ϵ resulta ser inyectiva y por tanto $\pi|_{D_z}$ es un homeomorfismo.

Vamos ahora a definir las cartas en X, para cada $z \in \mathbb{C}$ defina $\phi_z =: \pi(D_z) \to D_z$ como la inversa de $\pi|_{D_z}$. Claramente como π es sobreyectiva tenemos que $X = \bigcup_{z\in\mathbb{C}} \pi(D_z)$, solo resta verificar que las cartas sean compatibles dos a dos.

Considere dos cartas $(\phi_z, \pi(D_z))$ y $(\phi_w, \pi(D_w))$. Si $U = \pi(D_z) \cap \pi(D_w)$ es vacío ya tendríamos el resultado. Suponga que U es no vacío y note que $T(a) := \phi_w(\phi_z^{-1}(a)) = \phi_w(\pi(a))$ para $a \in \phi_z(U)$. Por definición tenemos que $\pi(T(a)) = \pi(\phi_w(\pi(a))) = \pi(a)$, entonces $T(a) - a = S(a)$ con $S(a) \in L$ para cada $a \in \phi_z(U)$. Claramente $S : \phi_z(U) \to L$ es una función continua y como L es discreto, entonces S es localmente constante, i.e. es constante en las componentes conexas de $\phi_z(U)$ que son las mismas componentes conexas de U. Así pues $T(a) = z + S(a) = z + l$ para algún $l \in L$ (determinado por la componente conexa de $\phi_z(U)$ donde este a) y por tanto T es holomorfa en a.

3. Funciones en superficies de Riemann

Definición 3.1. Sea X una superficie de Riemann, $F : X \to \mathbb{C}$ y $p \in X$. Decimos que f el **holomorfa** en p si existe una carta (U, ϕ) tal que $p \in U$ y $f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa en $\phi(p)$. Decimos que f el holomorfa en un abierto $W \subset X$, si f es holomorfa en cada punto de W.

Nota. $f : X \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $p \in X$ si y solo si para cata carta (U, ϕ) tal que $p \in U$ la composición $g \circ \phi^{-1}$ es holomorfa. Esto es fácil de ver con un argumento similar al presentado en el Lema 1.1.

Lema 3.1. *Considere $W \subset \mathbb{C}/L$ un abierto en el toro complejo y sea $f : W \to \mathbb{C}$. f es holomorfa en $p \in W$ si y solo si $\exists z \in \mathbb{C}$ tal que $\pi(z) = p$ y $f \circ \pi$ es holomorfa en z. Adicionalmente f es holomorfa en $W \subset X$ si y solo si $f \circ \pi$ es holomorfa en $\pi^{-1}(W)$.*

Demostración. Se sigue fácilmente de la definición de las cartas de $\mathbb{C}/L$ dadas en el Ejemplo 5. ☐

Definición 3.2. Sea f una función holomorfa en una vecindad puntuada de $p \in X$, con X una superficie de Riemann. Decimos que f tiene **una singularidad removible, un polo o una singularidad esencial** en p si existe una carta (U, ϕ) tal que $p \in U$ y $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad removible, un polo o una singularidad esencial respectivamente.

Definición 3.3. Una función $f : X \to \mathbb{C}$ se dice **meromorfa** en un abierto $W \subset X$, si f es holomorfa en $W \setminus P$, donde P es un conjunto discreto y cada punto $p \in P$ es una singularidad aislada o un polo de f.

Nota. Usando el Lema 3.1 podemos mostrar que $f : X \to \mathbb{C}$ es meromorfa en un abierto W de X si y solo si $f \circ \pi^{-1}$ es meromorfa en $\pi(W)$.

Ejemplo 6 (Funciones meromorfas en $\mathbb{CP}^1$)**.** Primero note que para construir funciones en $\mathbb{CP}^1$ debemos intentar construir funciones en $\mathbb{C}^2$ que sean invariantes bajo la acción de por multiplicación de $\mathbb{C}^*$. Si tomamos un polinomio $p(z, w)$ en dos variables, decimos que es **homogéneo** si cada uno de sus términos es del mismo grado, i.e. un polinomio homogéneo de grado k puede escribirse como

$$p(z, w) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j w^{k-j}.$$

Lema 3.2. *Si p, q son polinomios homogéneos de grado grado k y q no es idénticamente cero. Entonces, $r([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ es a una función meromorfa en $\mathbb{CP}^1$.*

Demostración. Como en el Ejemplo 4 cubrimos $\mathbb{CP}^1$ con los abiertos U_0y U_1. Para verificar que r es meromorfa, es suficiente verificar que $r(\phi_0^{-1}(u))$ es meromorfa en U_0. Pero por la definición de ϕ_0^{-1} tenemos

$$r((\phi_0^{-1}(u)) = r([1 : u]) = \frac{p(1, u)}{q(1, u)}$$

esta es una función racional de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, pues es un cociente de polinomios complejos en una variable.

Este mismo cálculo puede hacerse en la carta (ϕ_1, U_1). y esto muestra que $r([z : w]) = p(z, w)/q(z, w)$ es meromorfa. □

Teorema 3.3. *Toda función meromorfa en $\mathbb{CP}^1$ es un cociente de polinomios homogéneos en dos variables del mismo grado.*

Demostración. Recuerde que $\mathbb{CP}^1$ es compacto y por tanto si $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}$ es meromorfa no idénticamente cero, tiene una cantidad finita de ceros y polos, llámelos $\{[a_j : b_j]\}_{j=1}^n$ cada uno con orden $\mathrm{ord}(f, [a_j : b_j]) = e_j$.

Defina

$$r(z, w) = w^n \prod_j (b_j z - a_j w)^{e_j}$$

con $n = -\sum_j e_j$. Claramente r es un polinomio homogéneo pues $r(\lambda z, \lambda w) = \lambda^n w^n \prod_j (b_j \lambda z - a_j \lambda w)^{e_j} = \lambda^n w^n \prod_j \lambda^{e_j} (b_j z - a_j w)^{e_j} = \lambda^n w^n \lambda^{\sum_j e_j} \prod_j (b_j z - a_j w)^{e_j} = \lambda^{n+\sum_j e_j} w^n \prod_j (b_j z - a_j w)^{e_j} = r(z, w)$.

Ahora bien defina $g = r/f$, esta función no tiene polos ni ceros, salvo en $[1 : 0]$ posiblemente. Esto se puede ver fácilmente luego de precomponer g con las cartas de $\mathbb{CP}^1$.

Como g no tiene ceros, entonces $1/g$ no tiene polos. Esto implica que todas las singularidades de $1/g$ son removibles y por tanto $|1/g|$ es continua y por la compacidad de $\mathbb{CP}^1$ alcanza su máximo. Por el Principio del módulo máximo entonces $1/g$ es constante. Si suponemos que $[1 : 0]$ es polo de g, entonces este mismo punto es cero de $1/g$, por tanto $0 = 1/g = f/r$. Pero esto es una contradicción pues f no es idénticamente 0 en $\mathbb{CP}^1$.

Entonces de nuevo un argumento similar al anterior usando que g es holomorfa en $\mathbb{CP}^1$ tenemos que debe ser constante y por tanto f es un cociente de polinomios homogéneos. □

Referencias

[Lee03] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003. ISBN: 9780387954486.

[Mir95] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* Dimacs Series in Discrete Mathematics and Theoretical Comput. American Mathematical Society, 1995. ISBN: 9780821802687.