Diagonalización de matrices

David Jaramillo, *Universidad de los andes*

***Resumen*—En este escrito nos proponemos a demostrar que dado un espacio de Banach de dimensión finita, y un endomorfismo de dicho espacio, tenemos una descomposición que llamaremos la representación espectral del operador, dada por el teorema V.2. Esta representación lleva a la representación de Jordan del endomorfismo. La herramienta principal para llegar a éste resultado es el resolvente del endomorfismo; en el camino hacia dicho teorema se probarán diversos resultados sobre el resolvente que son altamente importantes. Entre ellos se prueba que el resolvente es una función meromorfa.**

I. Introduction

Cuando se estudían endomorfismos de espacios de Banach en dimensión finita, muchas veces se observa que hay operadores que hacen los cálculos complicados y computacionalmente costosos. Por esto se ha buscado expresar los operadores en formas que sean más fáciles de tratar.

En el presente escrito nos proponemos a desarrollar una de estás descomposiciones mostrada en el teorema V.2. Para hacer esto, definiremos el resolvente de un endomorfismo; y estudiaremos cómo se comporta la serie de Laurent de dicho resolvente alrededor de una singularidad.

Durante todo el escrito $\mathcal{X}$ denotará un espacio de Banach de dimensión finita. (Note que cada uno de éstos es isomorfo a $\mathbb{C}^{\dim(\mathcal{X})}$)

II. Valores propios

En lo primero que estamos interesados es en hallar los valores propios de una transformación, que están definidos como:

Definición II.1 (Valores y vectores propios)**.** Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$[1]. $\lambda \in \mathbb{C}$ se llama un *valor propio* de T y $u \in \mathcal{X}\backslash\{0\}$ se llama un *vector propio* (asociado al valor propio λ) si:

$$Tu = \lambda u \tag{1}$$

Es claro que el conjunto de vectores propios asociados a un valor propio fijo λ forma un subespacio de $\mathcal{X}$. Este subespacio se denota por N_λ y se conoce como el *espacio propio geométrico* de T asociado a λ. $\dim(N_\lambda)$ se conoce como la multiplicidad algebráica de λ. El conjunto de todos los valores propios de T se denota por $\Sigma(T)$ y se llama el *espectro de T*

Ahora si T es un endomorfismo de $\mathcal{X}$ tenemos que, tiene a lo sumo n valores propios ya que es claro que los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes. Luego el espectro de T siempre es un conjunto finito (de hecho de tamaño menor o igual a n).

[1]Denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ el conjunto de endomorfismos de $\mathcal{X}$

III. Resolvente

Para estudiar los valores propios de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ resulta que un operador de vital importancia es el resolvente:

Definición III.1 (Resolvente)**.** Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, Se define su resolvente como la función con valores en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$:

$$R(\zeta) = (T-\zeta)^{-1} \tag{2}$$

Note que por definición, la función R, sólo está definida en el complemento de $\Sigma(T)$, ya que sólo en esos valores el operador $T-\zeta$ es invertible. Dicho conjunto ($\mathbb{C}\backslash\Sigma(T)$) se conoce como el conjunto resolvente de T y se denota por $P(T)$

Note que por la definición tenemos que R es una función holomorfa (donde está definida), de hecho más tarde veremos que la función R es meromorfa. En lo siguiente se probarán un par de teoremas técnicos para hallar la serie de Laurent del resolvente alrededor de un valor propio del endomorfismo asociado.

Lema III.1 (Primera igualdad del resolvente)**.**

$$\forall \zeta_1, \zeta_2 \in P(T) \quad R(\zeta_1) - R(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)R(\zeta_1)R(\zeta_2) \tag{3}$$

Demostración: Tome $\zeta_1, \zeta_2 \in P(T)$, luego

$$\begin{aligned} R(\zeta_1) - R(\zeta_2) &= R(\zeta_1)(T-\zeta_2)R(\zeta_2) \\ &\quad - R(\zeta_1)(T-\zeta_1)R(\zeta_2) \\ &= R(\zeta_1)(\zeta_1-\zeta_2)R(\zeta_2) \\ &= (\zeta_1-\zeta_2)R(\zeta_1)R(\zeta_2) \end{aligned}$$

■

Corolario III.1.1. Para todo $\zeta_1, \zeta_2 \in P(T)$, $R(\zeta_1)$ y $R(\zeta_2)$ conmutan.

Demonstración: Consecuencia directa del lema III.1 ■

Teorema III.2 (Expansión en serie alrededor de infinito)**.**

$$R(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} T^n \tag{4}$$

Para ζ lo suficientemente grande.

Desmostración: Note que:

$$\begin{aligned} R(\zeta) = (T-\zeta)^{-1} &= -\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1}T)^{-1} \\ &= -\zeta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta^{-1}T)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}T^n \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad se obtiene cuando $\|\zeta\| > \|T\|$ ■

IV. Singularidades del Resolvente

Como se mencionó anteriormente el resolvente tiene singularidaes exactamente en los valores propios de T. Suponga sin pérdida de generalidad (Considerando la transformación $T-\lambda$ para algún $\lambda \in \Sigma(T)$), que 0 es un valor propio de T. Luego si consideramos la serie de Laurent de R alrededor de 0:

$$R(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n \tag{5}$$

Dónde los coeficiente vienen dados por:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^{-n-1} R(\zeta) d\zeta \tag{6}$$

Con Γ un círculo alrededor de 0 lo suficientemente pequeño para que $\overline{\text{int}(\Gamma)} \cap \Sigma(T) = \{0\}$. Podemos hallar los coeficientes con la siguiente fórmula:

Teorema IV.1. Si $R(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \zeta^n$ es la serie de Laurent de un resolvente. Entonces los coeficientes A_n cumplen con la siguiente relación:

$$A_n A_m = (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1} \tag{7}$$

Dónde:

$$\eta_n = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{8}$$

Más aún $A_n = A_0^{n+1}$ para $n \geq 0$, $A_{-n} = -D^{n-1}$ para $n \geq 2$ con $D = -A_{-2}$, y $-A_{-1}$ es una proyección ($(-A_{-1})^2 = -A_{-1}$)

Demostración: El círculo Γ que aparece en 6, puede ser agrandado un poco al círculo Γ' sin alterar el resultado, luego podemos escribir:

$$\begin{aligned} A_n A_m &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} R(\zeta') R(\zeta) d\zeta' d\zeta \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \int_{\Gamma'} \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} \times \\ &[R(\zeta') - R(\zeta)] d\zeta' d\zeta \end{aligned}$$

Dónde en la última igualdad se usó la ecuación 3. Y utilizando el hecho que las integrales se pueden resolver en cualquier orden y las propiedades, (que utilizan el hecho que Γ está dentro de Γ'):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^{-n-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} d\zeta = \eta_n \zeta'^{-n-1}$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} d\zeta' = (1 - \eta_m) \zeta^{-m-1}$$

Podemos llegar a:

$$\begin{aligned} A_m A_n &= \frac{\eta_n + \eta_m - 1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^{-n-m-2} R(\zeta) d\zeta \\ &= (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m+1} \end{aligned}$$

Como se quería probar. Ahora bien para $n = -1, m = -1$ la ecuación se reduce a $(A_{-1})^2 = -A_{-1}$ Luego $-A_{-1}$ es una proyección, que llamaremos P. Para $n, m < 1$ tenmos que: $A_{-2}^2 = -A_{-3}$, $A_{-4} = -A_{-2}A_{-3}$ y en general $A_{-k} = -A_{-2}A_{-k+1}$. Luego si definimos $D := -A_{-2}$ tenmos que $A_n = -D^{n-1}$ para $n < -1$. Similarmente tenemos que definiendo $S = A_0$, se cumple $A_n = S^{n+1}$ para $n \geq 0$. ∎

Este resultado nos permite escribir explícitamente la serie del resolvente:

Corolario IV.1.1. Si λ_h es un punto singular de $R(\zeta)$ entonces:

$$\begin{aligned} R(\zeta) = -(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h - \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} D_h^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^n S_h^{n+1} \end{aligned}$$

Donde S_h, D_h son operadores y P_h es una proyección. Más aún estos operadores cumplen con las siguientes propiedades:

$$P_h D_h = D_h P_h = D_h, \quad P_h S_h = S_h P_h = 0 \tag{9}$$

Demostración: Para la serie basta usar los resultados del teorema IV.1 y para las relaciones basta usar el mismo teorema con $n = -1, m = -2$ y $n = -1, m = 0$ ∎

Esto hace claro entonces que la serie de $R(\zeta)$ mostrada, descompone el operador $R(\zeta)$ según la descomposición de $\mathcal{X}$ dada por la proyección P_h ($\mathcal{X} = (P_h \mathcal{X}) \oplus ((1 - P_h)\mathcal{X})$). Con estos resultados, podemos probar entonces que el resolvente es una función meromorfa:

Teorema IV.2. El resolvente es una función meromorfa

Demostración: Considere la descomposición del resolvente dada por el corolario IV.1.1. ya que la primera linea es la parte principal de una serie de Laurent. Esta linea converge para todo $\zeta \neq \lambda_h$, luego el radio espectral de D_h debe ser 0 y por tanto el operador D_h debe ser nilpotente. En particular escribiendo $m_h = \dim(P_h \mathcal{X})$ tenemos que $D_h^{m_h} = 0$.

Por tanto la parte principal de R es finita y ya que esto se cumple para cualquier valor propio λ_h tenemos entonces que el resolvente es una función meromorfa. ∎

Por último nos interesa ver cómo se relacionan las diferentes expansiones de cada uno de los valores propios:

Teorema IV.3. Sean P_h los proyectores que aparecen en la expansión dada por el corolario IV.1.1, para cada valor propio distinto. Tenemos que:

$$P_h P_k = \delta_{hk} P_h \tag{10}$$
$$\sum_h P_h = 1 \tag{11}$$
$$P_h T = T P_h \tag{12}$$

Demostración: De la expansión del corolario IV.1.1, podemos deducir que

$$P_h = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_h} R(\zeta) d\zeta \tag{13}$$

Donde Γ_h es un círculo lo suficientemente pequeño para que la única singularidad en su interior sea λ_h. Para la primera igualdad, el resultado es cierto si $h = k$ porque P_h es una proyección; si $h \neq k$ basta ver con que los círculos Γ_h y Γ_k están separados entre sí luego:

$$\begin{aligned} P_h P_k &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_k} R(\zeta) R(\zeta') d\zeta d\zeta' \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_k} (\zeta - \zeta')^{-1} [R(\zeta) - R(\zeta')] d\zeta d\zeta' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se usó que ya que los círculos están aislados entonces $(\zeta - \zeta')^{-1}$ es holomorfa como función de ζ en $\mathrm{int}(\Gamma_k)$ para todo $\zeta' \in \Gamma_h$ y viceversa. y en la penúltima se usó la ecuacion 3.

Para la segunda igualdad basta integrar $R(\zeta)$ en un círculo lo suficientemente grande para que contenga todos los valores propios de T y usar el teorema III.2. Y por último, para la tercera igualdad note que $R(\zeta)$ conmuta con T para todo ζ entonces P_h, T conmutan por 13. ■

Del teorema IV.3 tenemos que las proyecciones descomponen el espacio, luego si denotamos por $M_h := P_h \mathcal{X}$ tenmos que:

$$\mathcal{X} = \oplus_h M_h \tag{14}$$

Luego sabiendo que en cada M_h tenemos una expansión dada por el corolario IV.1.1, tenemos entonces que:

$$R(\zeta) = -\sum_k \left[(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h + \sum_{n=1}^{m_h - 1} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} D_h^n \right] \tag{15}$$

Teorema IV.4. Sea T un endomorfismo de $\mathcal{X}$, R su resolvente y S_h, D_h, P_h, λ_h como en el corolario IV.1.1. Tenemos que:

$$(T - \lambda_h) S_h = S_h (T - \lambda_h) = 1 - P_h \tag{16}$$
$$P_h (T - \lambda_h) = (T - \lambda_h) P_h = D_h \tag{17}$$

Demostración: Note que:

$$TR(\zeta) = R(\zeta) T = (T - \zeta)^{-1} T = 1 + \zeta (T - \zeta)^{-1}$$

Multiplicando por T en la izquierda la ecuación 6 tenemos que:

$$\begin{aligned} A_n T &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^{-n-1} T R(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\zeta^{-n-1} + \zeta^{-n} R(\zeta)) d\zeta \\ &= \delta_{n0} + A_{n-1} \end{aligned}$$

Reemplazando $n = 0, -1$ y volviendo al caso genereal en el que $\lambda_h \neq 0$ obtenemos el teorema. ■

V. Forma canónica de un operador

Definición V.1. Los espacios M_h que aparecen en la ecuación 14 se conocen por el nombre de *espacio propio algebráico* y su dimensión se conoce como la *multiplicidad algebráica* del valor propio λ_h.

Teorema V.1. Con la notación del teorema IV.4, tenemos que:

$$T = \sum_h \lambda_h P_h + D_h \tag{18}$$

Demostración: Es consecuencia directa de la ecuación 17 ■

Ahora bien la descomposición del teorema anterior da pie a la siguiente definición

Definición V.2. Un operador S se dice diagonalizable si:

$$S = \sum_h \lambda_h P_h \tag{19}$$

Donde $(\lambda_h)_h \subset \mathbb{C}$ y P_h son proyecciones que cumplen las siguientes propiedades:

$$\sum_h P_h = 1, \quad P_h P_k = \delta_{hk} P_h \tag{20}$$

Ahora estamos listos para enunciar el teorema que muestra que cada operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tiene una representación espectral única que es la que da precisamente la representación de Jordan del operador.

Teorema V.2 (Representación espectral de operadores). Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\Sigma(T) = (\lambda_h)_h$ y R su resolvente tenemos que:

$$T = S + D \tag{21}$$

Dónde:

$$S = \sum_h \lambda_h P_h, \quad D = \sum_h D_h \tag{22}$$

Con P_h, D_h dados por la expansión en el corolario IV.1.1. Más aún, esta descomposición es única en el sentido siguiente: Si $T = S' + D'$ con S' diagonalizable, D' nilpotente y ambas conmutan, tenemos entonces que $S = S'$ y $D = D'$.

Demostración: Por el teorema V.1. Lo único que falta probar es que S y D conmutan y que son únicos. Para ver que S y D conmutan basta ver que:

$$P_h D_k = D_k P_h = 0, \quad D_h D_k = 0, \quad h \neq k.$$

Para ver esto basta usar la ecuación 9 y la ecuación 10:

$$\begin{aligned} &P_h D_k = P_h P_k D_k = \delta_{kh} D_k = 0 \\ &D_h D_k = P_h D_h P_k D_k = D_h P_h P_k D_k = D_h \delta_{kh} D_k = 0 \end{aligned}$$

Con esto ahora es claro que S y D conmutan.

Para ver que la descomposicion es única, lo primero que observamos es que si R es un operador que conmuta con S entonces conmuta con cada uno de los P_h (en otras palabras

M_h es un subespacio invariante de R). Para ver ésto, multiplicamos por P_h a la izquierda y por P_k a la derecha de $RS = SR$, obteniendo

$$\begin{aligned} \lambda_k P_h R P_k &= \lambda_h P_h R P_k \\ P_h R P_k &= 0 \quad h \neq k \end{aligned}$$

Fijando h y sumando sobre todo $k \neq h$, tenemos que: $P_h R(1 - P_h) = 0$, similarmente si intercambiamos los roles de k y h tenemos $(1 - P_h) R P_h = 0$. Uniendo estas dos ecuaciones tenmos que:

$$P_h R = R P_h$$

Como queriamos probar. Ahora suponga $T = S' + D'$ con S' diagonalizable y D' nilpotente, con $S'D' = D'S'$. Escriba:

$$S' = \sum_{h=1}^{s'} \lambda'_h P'_h$$

Ahora bien por el resultado previamente probado tenemos que $D' = \sum_{h=1}^{s'} D'_h$, con $D'_h P'_h = P'_h D'_h$ y tenemos que:

$$T - \zeta = \sum_{h=1}^{s'} (\lambda'_h - \zeta) P'_h + D'_h$$

Y además tenemos que:

$$\begin{aligned} (T - \zeta)^{-1} = -\sum_{h=1}^{s'} [(\zeta - \lambda'_h)^{-1} P'_h \\ + (\zeta - \lambda'_h)^{-2} D'_h + ... + (\zeta - \lambda'_h)^{-N} D'^{N-1}_h] \end{aligned}$$

Donde N es tal que $D'^N_h = D'^N = 0$. Esta última igualdad se puede probar simplemente multiplicando por $(T - \zeta)$ tanto a la derecha como a la izquierda. Con esto, comparando con la ecuación 15, obtenemos el resultado. ■

VI. Discusión

Habiendo probado los resultados anteriores, vale la pena recalcar algunas consecuencias importantes.

- Note que del teorema V.2 se sigue el teorema de descomposición de matrices de Jordan.
- Note que el operador D_h que aparecen en el teorema V.2 es un operador nilpotente en el espacio M_h. Si sucede que la dimensión de este espacio es 1 (la multiplicidad algebráica de λ_h es 1) entonces $D_h = 0$. Y si para cada valor propio se cumple esto, entonces tenemos que la transformación T es diagonalizable. Esto es equivalente a que el espectro de T, contenga tantos elementos como la dimensión de $\mathcal{X}$.
- De la descomposición dada por V.2 tenemos que:

$$\det(T - \zeta) = \prod_h (\lambda_h - \zeta)^{m_h} \tag{23}$$

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_h m_h \lambda_h \tag{24}$$

VII. Ejemplos

Para ilustrar la reducción mostrada anteriormente, se mostraran un par de ejemplos:

1. Considere $\frac{d}{dx} : \mathbb{C}_n[x] \to \mathbb{C}_n[x]$ el endomorfismo derivación, Note que $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n+1} = 0$, luego la descomposición de éste operador dada por el teorema V.2 es:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}$$

Ya que el endomorfismo es nilpotente, entonces el único valor propio es 0. y tenemos entonces que el resolvente es:

$$R(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\zeta^{k+1}} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \tag{25}$$

$$R(\zeta) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\zeta^{k+1}} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \tag{26}$$

2. Considere el operador $T : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}_2[x]$ definido por:

$$T(p(x)) = \frac{d}{dx}((x+1)p(x))$$

Los valores propios vienen dados por:

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= \lambda p(x) \\ (x+1)p'(x) + p(x) &= \lambda p(x) \\ (x+1)p'(x) &= (\lambda - 1)p(x) \end{aligned}$$

Y dicha ecuación diferencial tiene solución $p(x) = C(x+1)^{\lambda-1}$, ahora ya que $p(x)$ tiene que ser un polinomio entonces λ puede ser $1, 2, 3$, luego el operador es diagonalizable. (hay tres valores propios, entonces cada uno tiene multiplicidad algebráica 1). Luego tenemos que la descomposición de T es:

$$T = P_1 + 2P_2 + 3P_3$$

Donde P_1 es la proyección sobre span(1) a lo largo de span$(1+x, (1+x^2))$, P_2 es la proyección sobre span$(1+x)$ a lo largo de span$(1, (1+x^2))$, P_3 es la proyección sobre span$((1+x)^2)$ a lo largo de span$(1+x, 1)$. Para hallar el resolvente tenemos entonces que:

$$R(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta} P_1 + \frac{1}{2-\zeta} P_2 + \frac{1}{3-\zeta} P_3$$

Referencias

[Kat66] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132. Springer Berlin Heidelberg, 1966.