

# Transformaciones de Möbius y su visualización a través de deformación de imágenes

Felipe González Casabianca

Mayo 2016

## 1. Introducción

El objetivo del siguiente proyecto es introducir al lector a las transformaciones de Möbius, no solo exponiéndolo a sus características y motivaciones, si no dando algunos ejemplos concretos de que sucede cuando se le aplican estas transformaciones a imágenes, pudiendo visualizar explícitamente algunos de sus aspectos conocidos. Aunque para la comunidad matemática estas transformaciones son de gran importancia, es posible apreciar su valor sin conocer sus fundamentos teóricos, precisamente observando la manera particular como se pueden deformar imágenes utilizando estas transformaciones.[1]

Inicialmente se definen formalmente estas transformaciones y se muestran algunas de sus características más conocidas. Luego, se muestran algunos ejemplos de que sucede cuando se le aplican distintas funciones de este tipo a la misma imagen.

## 2. Transformaciones de Möbius

En su forma general, una transformación de Möbius, corresponde a una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma:

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Donde:  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y además:  $ad - bc \neq 0$ . Note que si la última condición no se tiene, la transformación se puede reescribir como:

1. Si  $c \neq 0$

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c}{c} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{acz + cb}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c}$$

2. Si  $c = 0$ , necesariamente se tiene que  $a = 0$  o  $d = 0$ . Pero el caso donde  $d = 0$  es imposible ya que el denominador no podría ser cero. Por lo tanto, si  $a = 0$ :

$$f(x) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{b}{d}$$

Por lo tanto, si  $ad = bc$ , tenemos que  $f$  es constante y en consecuencia no se incluye como transformación de Möbius.

**Proposición 1.** *Toda transformación de Möbius se pueden ver como la composición de las siguientes funciones más elementales:*

1.  $f(z) = z + a$ , con  $a \in \mathbb{C}$  (Traslación)

2.  $f(z) = cz$ , con  $c \in \mathbb{R}$  (Elongar)
3.  $f(z) = ze^{i\theta}$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$  (Rotación)
4.  $f(z) = \frac{1}{z}$  (Inversión)

**Demostración:**

Considere la siguiente transformación de Möbius:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Para empezar, note que si  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ , podemos escribir a  $w_1$  en su forma polar así:  $w = |w_1|e^{i\theta}$  con  $\theta$  el argumento de  $w_1$ . Por lo tanto, si  $f_1(z) = |w_1|z$ ,  $f_2(z) = ze^{i\theta}$  y  $f_3(z) = z + w_2$  tenemos que:

$$f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) = z|w_1|e^{i\theta} + w_2 = w_1z + w_2$$

es la composición de las funciones elementales mencionadas. Con esto en mente, considere las siguientes funciones:

- $w_1(z) = cz + d$
- $w_2(z) = \frac{1}{z}$
- $w_3(z) = (b - \frac{ad}{c})z$
- $w_4(z) = z + \frac{a}{c}$

Claramente son composición de las funciones elementales mencionadas y además:

$$w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1(z) = \frac{(b - \frac{ad}{c})}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{cb - ad + caz + ad}{c(cz + d)} = \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d} = f(z)$$

Por lo tanto  $f(z)$  es composición de dichas funciones. Note que si  $c = 0$ , tenemos que  $f(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$  que ya vimos que también es composición de funciones elementales.  $\square$

Uno de los resultados más populares acerca de las transformación de Möbius es que envían líneas y círculos en líneas y círculos. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 1, ya que es fácil ver como cada una de estas funciones elementales preserva líneas y círculos. Las primeras tres son inmediatas y la cuarta, aunque requiere algunas cuentas, no es difícil. Los detalles de estas demostraciones se encuentran en [3].

Por otro lado, note que las transformaciones de Möbius no siempre son holomorfas en todo  $\mathbb{C}$ , ya que las transformaciones con  $c \neq 0$ , tiene un polo de orden 1 en  $z = \frac{-d}{c}$ . Sin embargo, es posible extender estas transformaciones a  $\mathbb{C}_\infty$  ( $\mathbb{C}$  con  $\infty$ ), de la siguiente manera:

- si  $c \neq 0$

$$f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \text{ y } f(\infty) = \frac{a}{c}$$

- si  $c = 0$

$$f(\infty) = \infty$$

Por lo tanto, como en  $\mathbb{C}_\infty$  las líneas se pueden ver como círculos cerrados en el  $\infty$ , podemos decir que las transformaciones de Möbius mandan círculos en círculos en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Ahora bien, sabemos de la geometría euclidiana que para tres puntos (en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{C}$ ), existe un único círculo que pasa por ellos (el caso donde los tres puntos pasan por una recta corresponde al círculo cerrado en el infinito y también es único). Así que no resulta sorprenderse que podamos identificar de manera única estas

transformaciones mirando exclusivamente la imagen de tres puntos.

Para probar esto, la idea es encontrar una función  $f_1$  que mapea primero el círculo que pasa por los tres puntos en el dominio al eje real. Luego, usando el mismo esquema, se encuentra una función  $f_2$  que convierte el eje real en el círculo identificado por los tres puntos en la imagen. La composición de estas dos funciones determina unívocamente los valores de  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Para concentrar más el proyecto en la visualización de las transformaciones de Möbius, el lector puede ver los detalles de esta demostración en el capítulo 13 de [2].

### 3. Visualización a través de deformación de imágenes

La idea de esta sección es mostrar el comportamiento de las transformaciones de Möbius a través de la deformación de la siguiente imagen.

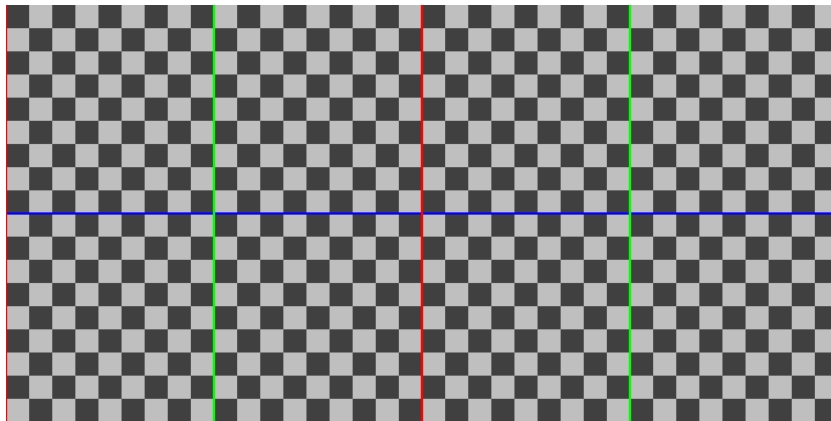


Figura 1: Imagen inicial. Dimensiones:  $360 \times 720$

La idea es que la imagen anterior represente el plano complejo y ver qué sucede con está luego de que se le aplique una transformación. Cada píxel representará un número complejo que será enviado hacia otro punto de la imagen, según una cierta transformación de Möbius, permitiéndonos apreciar el comportamiento particular de esta transformación sobre  $\mathbb{C}$ .

Para lograr esto, se utilizó el código escrito por Henry Segerman en su publicación [5]. Este *script* escrito en Python, permite manipular cualquier imagen usando cierto tipo de transformaciones de Möbius. Lo crucial de este código, es que no manipula la imagen directamente como si esta fuera el plano complejo, sino que le realiza ciertas transformaciones hasta visualizarla como  $CP1$  (la proyección estereográfica de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{C}$ ). Específicamente, el código realiza las siguientes transformaciones:

$$\text{Coordenadas en Píxeles} \longrightarrow \text{Coordenadas esféricas en } \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow CP1$$

Ahora bién, como los elementos de  $CP1$  se pueden ver como parejas de números complejos  $(w_1, w_2)$ , donde dicha pareja corresponde al número complejo  $z = w_1/w_2$  (claramente se tiene en  $CP1$  que  $(\alpha w_1, \alpha w_2) = (w_1, w_2)$ ), tenemos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw_1 + bw_2 \\ cw_1 + dw_2 \end{pmatrix} = \frac{aw_1 + bw_2}{cw_1 + dw_2} = \frac{\frac{1}{w_2}}{\frac{1}{w_2}} \left( \frac{aw_1 + bw_2}{cw_1 + dw_2} \right) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Así que aplicar transformaciones de Möbius en  $CP1$ , se reduce a multiplicar vectores en  $\mathbb{C}^2$  por matrices cuadradas  $2 \times 2$  con coordenadas en  $\mathbb{C}$ . El código permite llevar las coordenadas de los píxeles de cualquier imagen hasta  $CP1$  y devolverse eficientemente, haciendo que esta manipulación con transformaciones de

Möbius sea extremadamente sencilla. El código utilizado para las transformaciones de este proyecto es público y se encuentra en [https://github.com/minigonche/mobius\\_transformations](https://github.com/minigonche/mobius_transformations)

Con lo anterior en mente, se mostrarán las siguientes transformaciones sobre la imagen inicial:

### 1. Zoom

La primera transformación corresponde a:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} + \frac{2}{5}i \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{5}i & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Se llama de esta manera porque da la impresión que se está haciendo zoom sobre el píxel con coordenadas (180, 240).

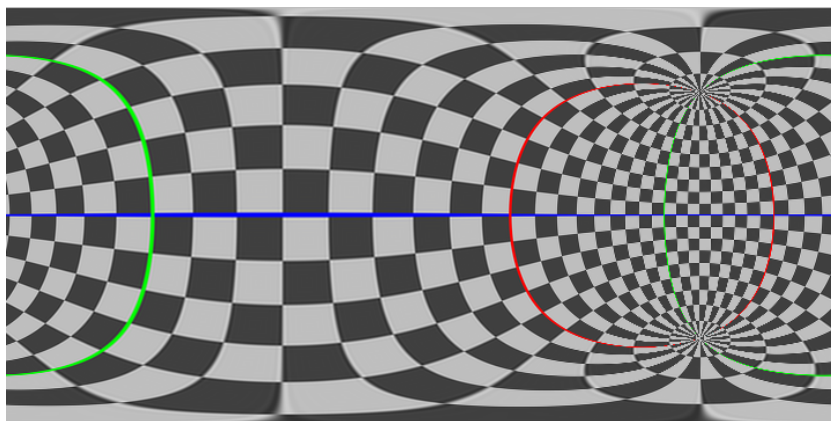


Figura 2: Primera Transformación: Zoom

### 2. Tres Puntos

La segunda transformación corresponde a:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,85 - 0,35i & 0,35 - 0,15i \\ -0,35 + 0,15i & 0,85 - 0,35i \end{pmatrix}$$

Esta transformación envía el píxel (180, 360) al píxel (90, 360) (Subir el píxel central 90 unidades). Además, deja los píxeles (180, 180) y (180, 540) quietos. Recuerde que una transformación de Möbius se puede identificar utilizando únicamente la imagen de tres puntos.

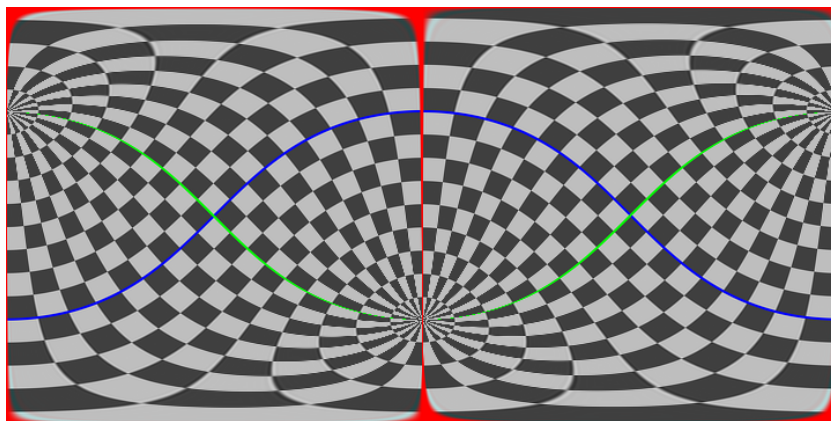


Figura 3: Segunda Transformación: Tres Puntos

### 3. Cayley

La tercera transformación corresponde a:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Esta transformación es en realidad el mapa conforme de Cayley, conocido por enviar matrices anti-simétricas en matrices ortogonales especiales.

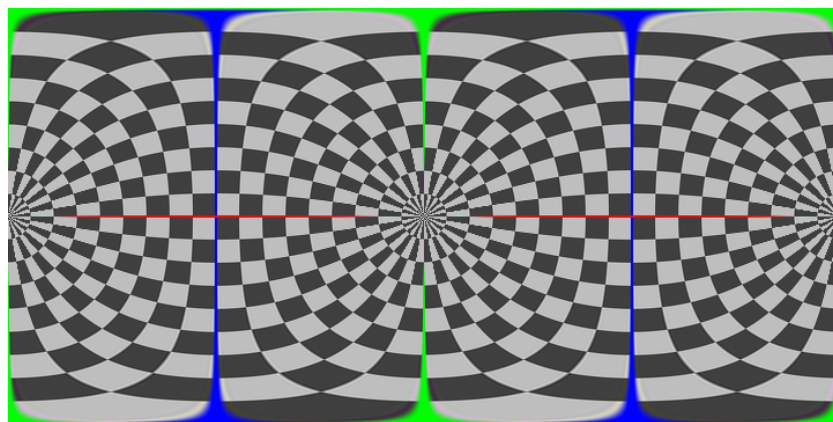


Figura 4: Tercera Transformación: Cayley

## 4. Conclusiones

A través de las imágenes ofrecidas, se ve de inmediato como las transformaciones de Möbius preservan círculos y líneas. En cada una de las imágenes, la cuadrícula fue deformada de tal manera que los bordes de los cuadros forman una serie de círculos. Como se mencionó al principio, visualizando las transformaciones de Möbius de este modo permite apreciar su validez sin tener un conocimiento matemático de fondo, fijándose únicamente en las formas geométricas que aparecen al deformar imágenes tan cuadrículadas.

Con el ánimo de difundir las motivaciones de este proyecto, se montó una página web que permite manipular la imagen utilizada en este proyecto de manera interactiva. El usuario podrá escoger los valores de:  $a, b, c$  y  $d$ , y ver como se transforma la imagen.

La página web se encuentra en: <http://52.67.10.188:8080/>

## Referencias

- [1] Douglas N Arnold and Jonathan Rogness. Möbius transformations revealed. 2008.
- [2] WWL Chen. Introduction to complex analysis. *image*, 1(2):1, 2008.
- [3] John Olsen. The geometry of möbius transformations. *Rochester: University of Rochester*, 2010.
- [4] Luis Peñaranda, Luiz Velho, and Leonardo Sacht. Real-time correction of panoramic images using hyperbolic möbius transformations. *Journal of Real-Time Image Processing*, pages 1–14, 2015.
- [5] Henry Segerman. Spherical video editing effects with möbius transformations, jan 2016.
- [6] Rob Silicianoa. Transformations with spheres. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 13(2), 2012.