Una función entera universal y el límite de sus anti-derivadas

Diego F. Fonseca. V[⋆]

Resumen. Este articulo muestra la existencia de una función entera f tal que cualquier función entera puede ser aproximada compactamente por su sucesión de derivadas $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ y por una sucesión estricta de anti-derivadas $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$, al final se caracterizara el límite de esta ultima sucesión.

Palabras clave: Convergencia compacta, función entera, anti-derivada.

1 Introducción

La universalidad de una función es concepto que se puede interpretar desde varios pontos de vista, este articulo contemplaremos tan solo dos tipos de universalidad:

Tipo 1: Una función entera f se dice *universal del tipo 1* si su conjunto de derivadas $\left\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es denso en el conjunto de todas las funciones enteras.

Tipo 2: Una función entera f se dice *universal del tipo 2* si existe una sucesión estricta de anti-derivadas $\left\{f^{(-n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de f que es densa en el conjunto de todas las funciones enteras.

El concepto de "densidad" que hace referencia ambos tipos de universalidad se refiere a la densidad que se tiene en el espacio de todas las funciones enteras dotado con la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.
Una sucesión $\left\{f^{(-n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de anti-derivadas de f se dice *sucesión estricta de anti-derivadas de f en $\mathbb{C}$* si $f^{(0)} = f$ y $\frac{d}{dz}f^{(-(n+1))} = f^{(-n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definiendo el operador integral I definido por $I(g)(z) := \int_0^z g(\xi)d\xi$ para cualquier función entera g, donde dicha integral se entiende como la tomada sobre el segmento que une los puntos 0 y z, y donde I^k representa la repetida aplicación de I, es decir, k-veces, se puede caracterizar toda sucesión estricta de anti-derivadas de f en $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
f^{(-1)}(z) &= I(f)(z) + C_1 \\
f^{(-2)}(z) &= I(f^{(-1)})(z) + C_2 = I^2(f)(z) + C_1 z + C_2 \\
&\vdots \\
f^{(-n)}(z) &= I^n(f)(z) + \textstyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} C_{n-j} z^j
\end{aligned}
$$

donde cada C_i y son constantes reales. De modo que la densidad de una sucesión estricta de anti-derivadas $\left\{f^{(-n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de f en el conjunto de todas las funciones enteras depende de una adecuada elección de las constantes C_i.

El primer objetivo de este articulo es demostrar la existencia de una función

[⋆] Universidad de los Andes,Bogotá, Colombia. {`df.fonseca@uniandes.edu.co`

f entera que es universal en ambos tipos, para tal fin, en la Sección 2, se probara la existencia de una función universal del tipo 1, trabajo que se realiza en [1] pero que en este caso lo demostraremos con mayor detalle, después, en la Sección 3 se demostrara que dicha función también es universal del tipo 2.

Garantizada la existencia de dicha función f con universalidad de ambos tipos, nos enfocamos en la universalidad del tipo 2, como es sabido el conjunto $\left\{f^{(-n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que determina dicha universalidad es una sucesión estricta de anti-derivadas de f, la cual satisface que para cualquier función entera g existe una subsucesión de $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge compactamente a g en $\mathbb{C}$, de modo que la primera inquietud que surge es saber a que converge la sucesión completa $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$, responder dicha inquietud constituye el segundo objetivo de este articulo, en la Sección 4 se da respuesta a dicha inquietud dando una caracterización del limite de sucesiones estrictas de anti-derivadas de f en $\mathbb{C}$.

2 Existencia de una función entera universal del tipo 1

Esta sección se traduce en probar el siguiente resultado:

Teorema 1. *Existe una función entera f tal que el conjunto de $\left\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ de todas las derivadas de f es denso en el conjunto de todas las funciones enteras en la topología de la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Considere $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales, entonces $\mathcal{P}$ se puede enumerar, es decir, $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, además, considere I el operador integral definido al principio de este articulo. La función deseada f tendrá la forma $f = \sum_{n=1}^{\infty} I^{k_n}(P_n)$ donde los k_n son enteros positivos que se eligen satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

1. $k_n > k_j + \deg(P_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$.
2. Definiendo $H_n := I^{k_n}(P_n)$, se debe tener $|H_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}$ para $j = 1, 2, \ldots, k_{n-1}$ y $|z| \leq n$.

Primero se demostrara que con dicha elección de los k_n se tiene que f es la función deseada, al final se mostrara que la elección de los k_n es posible.
Note que f se puede expresar como $f = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$, ademas esta serie converge uniformemente en conjuntos compactos, lo que permite expresar $f^{(i)} = \sum_{l=1}^{\infty} H_l^{(i)}$, en particular, $f^{(k_n)} = \sum_{l=1}^{\infty} H_l^{(k_n)}$.
Ahora, cualquier $P_l \in \mathcal{P}$ se puede ver como $P_l(z) = a_0^{(l)} + a_1^{(l)} Z + \cdots + a_{m_l}^{(l)} z^{m_l}$ donde cada $a_i^{(l)}$ son coeficientes racionales, entonces la derivada j-ésima de H_l es

$$H_l^{(j)}(z) = \sum_{i=0}^{m_l} \frac{i! a_i^{(l)} z^{i+k_n-j}}{(i+k_n-j)!} \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, k_{n-1}.$$

En particular, por la condición **1**, para $l < n$ se sigue $H_l^{(k_n)} = 0$; para $l = n$ se tiene $H_n^{(k_n)}(z) = P_n(z)$ y definiendo $E_n(z) := \sum_{l=n+1}^{\infty} H_l^{k_n}(z)$ en $|z| \leq n$, por la condición **2** se sigue

$$|E_n(z)| \leq \left| \sum_{l=n+1}^{\infty} H_l^{k_n}(z) \right| \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} \left| H_l^{(k_n)}(z) \right| \leq \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^n}.$$

Por lo tanto,

$$f^{(k_n)}(z) = P_n(z) + E_n(z) \quad \text{donde } |E_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \text{ para } |z| \leq n. \tag{1}$$

Así pues, sea g cualquier función entera, entonces g puede ser aproximada en conjuntos compactos por polinomios (por ejemplo, la suma parcial de su serie de Taylor) y ya que en cualquier compacto cualquier polinomio puede ser aproximado uniformemente por polinomios con coeficientes racionales, entonces, para cualquier conjunto $K \subseteq \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P_m \in \mathcal{P}$ tal que $|P_m(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $z \in K$. Note que podemos asumir m de tal manera que $|z| \leq m$ para todo $z \in K$ y $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, de esto último y de (1) se obtiene

$$\begin{aligned}\left|f^{(k_m)}(z) - g(z)\right| &\leq |P_m(z) + E_m(z) - g(z)| \leq |P_m(z) - g(z)| + |E_m(z)| \\ &\leq |P_m(z) - g(z)| + \tfrac{1}{2^m} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $z \in k$. Lo que muestra que el conjunto de todas las derivadas de f es denso.

Tan solo resta justificar la elección de los k_n de tal manera que satisfagan las condiciones **1** y **2**. En efecto, observe que $I(z^r) = \frac{z^{r+1}}{(r+1)}$, lo que permite inferir

$$\left|H_n^{(j)}\right| = \left|\sum_{i=0}^{m_n} a_i^{(n)} I^{k_n-j}(z^i)\right| \leq \sum_{i=0}^{m_n} \left|a_i^{(n)}\right| \left|I^{k_n-j}(z^i)\right| \leq \sum_{i=0}^{m_n} \left|a_i^{(n)}\right| |z^i| \frac{|z^{k_n-j}|}{(k_n-j)!}.$$

Luego, para $|z| \leq n$ se sigue $|z^i| \leq n^i$ y $\frac{|z^{k_n-j}|}{(k_n-j)!}$ converge uniformemente a cero cuando $k_n \to \infty$ en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$, así, consideramos k_n lo suficientemente grande tal que (asumiendo que ya definimos los k_s anteriores a k_n)

$$\frac{|z^{k_n-j}|}{(k_n-j)!} \leq \frac{1}{2^n \sum_{i=0}^{m_n} n^i |a_i^{(n)}|} \quad \text{y} \quad k_n > k_s + \deg P_s \text{ para } s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Por lo tanto, $\left|H_n^{(j)}(z)\right| \leq \frac{1}{2^n}$. □

3 Existencia de una función entera con universalidad del tipo 1 y 2

Para lograr el objetivo de esta sección es importante el siguiente lema.

Lema 1. *Sea f una función entera, entonces la sucesión estricta de anti-derivadas $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f^0 = f$ y $f^{(-n)}(z) := I^n(f)(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, converge compactamente a cero en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, entonces existe $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ para cada $z \in K$. Considerando $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j$ la serie de Taylor de f al rededor de cero, dado que f es entera, esta serie converge en particular para $|z| \leq R$, de modo que se puede caracterizar $f^{(-n)}$ como $f^{(-n)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\alpha_j| z^j}{(j+1)\cdots(j+n)}$ en $|z| \leq R$, esta ultima serie converge, en efecto, es posible considerar la constate $C := \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| R^j$ ya que esta serie converge, por lo tanto, para $|z| \leq R$ se sigue

$$\left|f^{(-n)}(z)\right| = \frac{R^n}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| R^j = \frac{R^n}{n!} C$$

lo que demuestra que $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|\alpha_j||z^j}{(j+1)\cdots(j+n)}$ converge, más aun, $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $\overline{\mathcal{B}_R(0)}$, en particular, en K. $\square$

El anterior lema permite demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea f una función entera. Entonces existe $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estricta de anti-derivadas de f densa en el conjunto de todas las funciones enteras.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$, el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales, este conjunto es denso (en el sentido expresado al inicio del articulo) en el conjunto de todas las funciones enteras.
Inicialmente se construirá por inducción una sucesión de números $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión de funciones $(g_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que son anti-derivadas de f y que permitirá construir la sucesión $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ deseada.
Sea $m_0 = 0$ y $g_{m_0} = f$, suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ los números $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ y las funciones $g_{m_0}, g_{m_1}, \ldots, g_{m_{n-1}}$ ya fueron definidos. Para definir m_n y g_{m_n} primero se debe considerar lo siguiente:

1. Como $g_{m_{n-1}}$ es una anti-derivada de f, supongamos que es una s-ésima anti-derivada para algún $s \in \mathbb{N}$, entonces, por lo mencionado al principio del articulo $g_{m_{n-1}}$ se puede expresar como $g_{m_{n-1}}(z) = I^s(f)(z) + \sum_{j=0}^{s}\frac{1}{j!}C_{s-j}z^j$. Definiendo $h_{n-1}(z) := \sum_{j=0}^{s}\frac{1}{j!}C_{s-j}z^j$, para $|z| \leq n$ se sigue
$$|I^k(h_{n-1})(z)| \leq \sum_{j=0}^{s}\frac{|C_{s-j}|}{j!}|I^k(z^j)| \leq \frac{|z^k|}{k!}\sum_{j=0}^{s}|C_{s-j}||n^j|.$$
Como $\frac{|z^k|}{k!}$ converge uniformemente a cero en $\overline{\mathcal{B}_n(0)}$, entonces existe $M_1 > 0$ tal que si $k \geq M_1$ entonces $|I^k(h_{n-1})(z)| \leq \frac{1}{2n}$.
2. Por el Lema 1 se infiere que $\left(I^k(f)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cero compactamente en $\mathbb{C}$, en particular, existe $M_2 > 0$ tal que si $k \geq M_2$, $\left|I^k(f)(z)\right| \leq \frac{1}{2n}$ para todo $|z| \leq n$.

Por lo tanto, se define $m_n := m_{n-1} + s + M_1 + M_2 + 1 + \deg P_n$, esta elección garantiza en primer lugar
$$\left|I^{m_n}(g_{m_{n-1}})(z)\right| \leq \left|I^{m_n+s}(f)(z)\right| + |I^{m_n}(h_{n-1})(z)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para } |z| \leq n. \tag{2}$$
Así pues, se define $g_{m_n}(z) := I^{m_n}(g_{m_{n-1}})(z) + P_n(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Observe que de (2) se infiere
$$|g_{m_n}(z) - P_n(z)| = \left|I^{m_n}(g_{m_{n-1}})(z)\right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para } |z| \leq n. \tag{3}$$
Por lo tanto, se ha construido una sucesión de funciones $(g_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ definida como se definió g_{m_n} y satisfaciendo (3), luego, del hecho $\deg P_n < m_n < r_n$ y definiendo $r_n := \sum_{p=0}^{n} m_p$ se sigue que
$$\frac{d^{r_n}}{dz^{r_n}}g_{m_n}(z) = \frac{d^{r_n}}{dz^{r_n}}I^{m_n}(g_{m_{n-1}})(z) + \frac{d^{r_n}}{dz^{r_n}}P_n(z) = \frac{d^{r_{n-1}}}{dz^{r_{n-1}}}g_{m_{n-1}}(z)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que permite afirmar que cada g_{m_n} es una r_n-ésima anti-derivada de f, en efecto

$$\frac{d^{r_n}}{dz^{r_n}} g_{m_n}(z) = \cdots = \frac{d^{r_1}}{dz^{r_1}} g_{m_1}(z) = \frac{d^{m_1}}{dz^{m_1}} I^{m_1}(g_{m_0})(z) = g_{m_0}(z) = f(z).$$

Más aun, observe que $\frac{d^{m_n}}{dz^{m_n}} g_{m_n}(z) = \frac{d^{m_n}}{dz^{m_n}} I^{m_n}(g_{m_{n-1}})(z) = g_{m_{n-1}}(z)$.

Por consiguiente, la sucesión $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ deseada se construye de la siguiente manera: $f^{(0)} = f$ y para $n \neq 0$ note que siempre existen $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \{0, 1 \ldots, m_k - 1\}$ tal que $n = r_k - l$ donde k y l son únicos, entonces se define

$$f^{(-n)}(z) = f^{(-r_k+l)}(z) := \frac{d^l}{dz^l} g_{m_k}(z).$$

Note que $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal como se definió es una sucesión estricta de anti-derivadas de f ya que

$$\frac{d^n}{dz^n} f^{(-n)}(z) = \frac{d^{r_k-l}}{dz^{r_k-l}} \frac{d^l}{dz^l} g_{m_k}(z) = \frac{d^{r_k}}{dz^{r_k}} g_{m_k}(z) = f(z) \quad \text{y}$$

$$\frac{d}{dz} f^{(-(n+1))}(z) = \frac{d}{dz} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} g_{m_k}(z) = \frac{d^l}{dz^l} g_{m_k}(z) = f^{(-n)}(z).$$

Tan solo resta mostrar que $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es denso, en efecto, sea F una función entera, $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto y $\varepsilon > 0$, entonces existe $N > 0$ tal que $|z| \leq N$ para todo $z \in K$. Como $\mathcal{P}$ es denso entonces existe $P_n \in \mathcal{P}$ tal que $|P_n(z) - F(z)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ para $|z| \leq N$, note que podemos asumir n suficientemente grande de tal manera que $n \geq N$ y $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Por lo tanto, de esto último y de (3) se sigue

$$\left| f^{(-r_n)}(z) - F(z) \right| = |g_{m_n}(z) - F(z)| \leq |g_{m_n}(z) - P_n(z)| + |P_n(z) - F(z)| \leq \varepsilon$$

para todo $|z| \leq N$, en particular, para todo $z \in K$, lo que muestra la densidad de $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$. □

Considerando f la función dada por el Teorema 1 se aplica a esta el Teorema 2 lo que permite afirmar que f es una función entera con universalidad del tipo 1 y 2.

4 Límite de la sucesión estricta de anti-derivadas

El objetivo de esta sección es alcanzado en el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea f una función entera, una sucesión estricta de anti-derivadas $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente en $\mathbb{C}$ a alguna función g si y solo si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $(f^{(-n)}(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, más aun, $g(z) = Ae^z$ para algún $A \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente en $\mathbb{C}$, en particular, para todo $z_0 \in \mathbb{C}$, $(f^{(-n)}(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Recíprocamente, por el Lema 1 se sigue que la sucesión estricta de anti-derivadas $(I^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente a cero, luego, por lo mencionado al principio del articulo cada $f^{(-n)}$ se puede caracterizar como $f^{(-n)}(z) = I^n(f) + P_n(z)$ donde P_n es un polinomio de grado n. Suponga que $\lim_{n\to\infty} f^{(-n)}(z_0) = C$, entonces $\lim_{n\to\infty} P_n(z_0) = C$, como $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estricta de anti-derivadas de f, entonces $P'_{n+1}(z) = P_n(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}_{>0}$, de modo que cada P_n es caracterizado (serie de Taylor al redor de z_0) por

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P_{n-j}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j.$$

Un argumento similar al usado en las demostraciones anteriores muestra que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente en $\mathbb{C}$, más aun, converge a $g(z) = Ce^{z-z_0}$. Por lo tanto, $(f^{(-n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente a $g(z) = Ae^z$ donde $A = Ce^{-z_0}$. $\square$

Referencias

1. C. Blair & L. Rubel, *A universal entire function*, Amer. Math, 90(5), 331-332 (1983)
2. C. Blair & L. Rubel, *A triply universal entire function*, Enseign. Math, 30(3-4), 269-274 (1984)
3. L. Wolfgang, *Approximation by Antiderivatives*, Constructive Approximation, 2(1), 179–187 (1986)
4. L. Wolfgang, *On the "universality" of any holomorphic function*, Results Math., 10(1-2), 130–136 (1986)
5. R.E. Greene & S.G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons Inc, New York, (1997)