Análisis complejo

Taller 11

Convergencia de funciones holomorfas; Riemann mapping theorem. Fecha de entrega: 27 de abril de 2016

Sea X un espacio métrico. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $U \to \mathbb{C}$ se llama *continuamente convergente* si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$ existe.

1. (a) Sea X un espacio métrico y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en X que converge continuamente. Demuestre que $f : X \to \mathbb{C},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$ está bien definido (es decir, que es independiente de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escogida) y que f es continua (inclusive si las f_n no lo son).

   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en X que converge continuamente. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

   (i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente a una función $f \in C(U)$.

   (ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente.

   En particular, una sucesión continuamente convergente de funciones holomorfas converge a una función holomorfa.

2. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas $U \to \mathbb{C}$. Suponga que $f_n \to f$ compactamente y que f no es constante. Demuestre:

   (a) Para todo $z_0 \in U$ existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ y un $N_0 \in \mathbb{N}$ con $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ y $f_n(z_n) = f(z_0)$ para todo $n \geq N_0$.

   (b) Si existe $W \subset \mathbb{C}$ tal que $f_n(U) \subseteq W$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces también $f(U) \subseteq W$.

   (c) Si todas f_n son inyectivas, f también es inyectiva.

   (d) Si todas f_n son localmente biholomorfas, f también es localmente biholomorfa.

3. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas y localmente acotadas $U \to \mathbb{C}$. Suponga que existe un $z_0 \in U$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ la sucesión $\left(f_n^{(k)}(z_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge compactamente.

4. Encuentre una función biholomorfa $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.