Análisis complejo

Taller 8

Sigularidades aisladas.

Fecha de entrega: 6 de abril de 2016

---

1. Sea $R = \frac{P}{Q}$ con polinomios P y Q tal que $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y tal que $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$. Muestre que $\lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x$ existe y exprese este límite en términos de los residuos de R.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea γ_n el borde del rectángulo con esquinas $n + \frac{1}{2} + \mathrm{i}n$, $-n - \frac{1}{2} + \mathrm{i}n$, $-n - \frac{1}{2} - \mathrm{i}n$, $n + \frac{1}{2} - \mathrm{i}n$. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
   (a) Demuestre que $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+a)^2}\,\mathrm{d}z = 0.$
   (b) Demuestre que $\displaystyle \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$

3. (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región, $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, f meromorfa en U con zeros en $z_1, \dots, z_n$ y polos en $p_1, \dots, p_k$. Sea γ una curva cerrada homotópicamente nula en U y suponga que $\gamma \cap \{z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_k\} = \emptyset$. Demuestre que
   $$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} g(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} g(z_j)\operatorname{ord}(f, z_j)\operatorname{ind}_{\gamma}(z_j) - \sum_{j=1}^{k} g(p_j)\operatorname{ord}(f, p_j)\operatorname{ind}_{\gamma}(p_j).$$
   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, sean $p \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tal que $\overline{B_R(p)} \subset U$. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y suponga que $f|_{B_R(p)}$ es inyectiva. Sea $V := \{f(z) : z \in B_R(p)\}$. Entonces $f^{-1} : V \to B_R(p)$ está bien definida. Demuestre que
   $$f^{-1}(q) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial B_R(p)} \frac{z f'(z)}{f(z) - q}\,\mathrm{d}z, \qquad q \in V.$$

4. Sean $b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $k, n \in \mathbb{N}$ con $0 < k < n$. Defina $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = z^n + bz^k + c$.
   (a) Suponga que $|z^n| > |bz^k + c|$ para todo z con $|z| = R$ y $|c| > |z^n + bz^k|$ para todo z con $|z| = r$. Muestre que todos los ceros de P pertenecen a $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$.
   (b) Determine el número de los ceros (contado con multiplicidad) de:
      (i) $P_1(z) := z^8 - 3z^2 + 1$ en $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$,
      (ii) $P_2(z) := z^7 - 5z^3 + 7$ en $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$,
      (iii) $P_3(z) := 3z^4 - 7z + 2$ en $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3/2\}$.