Análisis complejo

Taller 7

Singularidades aisladas.

Fecha de entrega: 30 de marzo de 2016

---

1. Sea $\gamma = \partial(B_2(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\})$. Calcule las siguientes integrales:

$$(a) \quad \int_{\partial B_2(0)} \frac{1}{(\sin z)^2 \cos z} \, \mathrm{d}z, \qquad (b) \quad \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+1} \, \mathrm{d}z.$$

2. Calcule las siguientes integrales con métodos de análisis complejo:

$$(a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+13} \, \mathrm{d}x, \qquad (b) \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \, \mathrm{d}x, \qquad (c) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

3. Para $a > 0$ y $t > 0$ calcule las integrales impropias

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^2+x^2} \cos(ax) \, \mathrm{d}x, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{t^2+x^2} \sin(ax) \, \mathrm{d}x.$$

4. Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2} \cos(ax) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-a^2/2}$ para $a \in \mathbb{R}$.

   Ayuda. Para $R > 0$ considere el camino γ que es la frontera del rectángulo con esquinas $-R$, R, $R + \mathrm{i}a$ y $-R + \mathrm{i}a$.

Ejercicio voluntario

---

5. Solucione uno de los ejercicios abajo. La nota va a reemplazar la nota del ejercicio correspondiente del examen parcial.
   (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Suponga que f no es constante. Demuestre que $\mathrm{Re} f + \mathrm{Im} f$ no tiene un mínimo en U.
   (b) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y sea L una recta en $\mathbb{C}$ (es decir, existen $u, p \in \mathbb{C}$, $u \neq 0$, con $L = \{p + tu : t \in \mathbb{R}\}$). Suponga que $f : U \to \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en $U \setminus L$. Demuestre que f es holomorfa en U.

Ejercicio extra para los estudiantes con código 4

---

6. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Suponga que para $a \in \mathbb{C}$, por lo menos un coeficiente en la serie de Taylor de f en a se anula. Muestre que f es un polinomio.