Universidad de los Andes, MATE-3210, MATE-4210

Análisis complejo

Taller 6

Teorema de Cauchy; residuos.

Fecha de entrega: 16 de marzo de 2016

---

1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $z_0 \in U$. Demuestre:

   (a) Sea f una función meromorfa sobre U con un polo de orden $\leq k$ en z_0. Entonces
   $$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \left.\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\right|_{z=z_0} \left((z-z_0)^k f(z)\right).$$

   (b) Sean $g, h : U \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas y suponga que h tiene un cero simple en z_0. Sea $f = g/h$. Entonces
   $$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

2. Sea $M \subset \mathbb{C}$ un conjunto finito y sea $f : \mathbb{C} \setminus M \to \mathbb{C}$ holomorfa.

   (a) Muestre que $g(z) := z^{-2} f(z^{-1})$ es holomorfa en $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

   (b) Muestre que $\operatorname{Res}_0 g = \sum_{c \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}_c f$.

   (c) Calcule $\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} \frac{5z^6+4}{2z^7+1}\, \mathrm{d}z$.

3. Determine todas las funciones biholomorfas $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   Hint. Suponga que f es una función biholomorfa $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Considere $f(1/z)$.

4. Determine todos los valores que puede tomar $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\, \mathrm{d}z$ si γ es un camino cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$.