Análisis complejo

Taller 5

Singularidades aisladas. Fecha de entrega: 24 de febrero de 2016

---

1. Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Para la funciones siguientes determine el tipo de la singularidad en 0. Si es una singularidad removible, determine la extensión continua de la función, si es un polo, determine la parte principal su serie de Laurent en 0, si es una singularidad esencial, determine $\{f(z) : |z| < \varepsilon\}$ para $\varepsilon > 0$.
$$f : D \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^z}, \qquad\qquad g : D \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}},$$
$$h : D \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \cos\frac{1}{z}, \qquad\qquad k : D \to \mathbb{C}, \quad k(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

2. Determine la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en las regiones $U_1 := \{0 < |z| < 1\}$, $U_2 := \{1 < |z| < 2\}$, $U_3 := \{|z| > 2\}$.

3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$ y $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfo. Muestre que e^f no tiene un polo en z_0.

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in G$, $\widetilde{G} := G \setminus \{z_0\}$, $f, g : \widetilde{G} \to \mathbb{C}$ holomorfas y z_0 una singularidad no esencial de f y g. Sea
$$\operatorname{ord}(f, z_0) = \begin{cases} 0 \text{ si } z_0 \text{ es una singularidad removible,} \\ \text{orden del polo de } f \text{ en } z_0 \text{ si } z_0 \text{ es un polo.} \end{cases}$$
Muestre que z_0 es una singularidad no esencial de $f + g$, fg y, si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \widetilde{G}$, $\dfrac{f}{g}$ y que las siguientes fórmulas valen:
   (a) $\operatorname{ord}(f + g; z_0) \geq \min\{\operatorname{ord}(f; z_0), \operatorname{ord}(g; z_0)\}$,
   (b) $\operatorname{ord}(fg; z_0) = \operatorname{ord}(f; z_0) + \operatorname{ord}(g; z_0)$,
   (c) $\operatorname{ord}\left(\dfrac{f}{g}; z_0\right) = \operatorname{ord}(f; z_0) - \operatorname{ord}(g; z_0)$.

Ejercicio voluntario

---

5. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto que contiene a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Sea $f : U \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en 0. Suponga que f tiene un polo simple en 1. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$.