

Análisis complejo

Taller 4

El principio del máximo; principio de la identidad. Fecha de entrega: 17 de febrero de 2016

1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in U$ y $R > 0$ tal que $B_R(z_0) \subseteq U$. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ centrada a z_0 . Para $0 < r < R$ defina $M(r) := \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

(a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $0 < r < R$

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt.$$

(b) Demuestre que para todo $0 < r < R$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt \leq M(r)^2.$$

2. (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ una región y sea $K \subset U$ un subconjunto compacto con interior K° no vacío. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $|f|$ constante en la frontera de K . Muestre que f es constante o tiene un cero en K° .

(b) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $z_0 \in U$, $\varepsilon > 0$ tal que la bola cerrada $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$ es un subconjunto de U . Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $|f(z_0)| < \min\{|f(z)| : |z - z_0| = \varepsilon\}$. Muestre que f tiene un cero en $B_\varepsilon(z_0)$.

3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, $f : U \rightarrow X$ una función holomorfa no constante y $N := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$. Muestre que N es cerrado y discreto en U .

4. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, sin puntos aislados de la frontera, y sea $M \subset U$ un conjunto sin puntos de acumulación en U . Muestra que cada función biholomorfa¹ $f : U \setminus M \rightarrow U \setminus M$ tiene una extensión biholomorfa $g : U \rightarrow U$.

Ejercicio extra para estudiantes inscritos en MATE-4210

5. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \in (0, \infty)$. Muestre que f tiene por lo menos un punto singular² en la frontera del disco de convergencia.

¹ $f : U \rightarrow V$ se llama *biholomorfa* si f es una biyección y tanto f como f^{-1} son holomorfas.

²Un punto p en la frontera de $B_R(z_0)$ se llama *punto singular*, si no existe ninguna vecindad U de p y $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para $z \in U \cap B_R(z_0)$.