Universidad de los Andes, MATE-3210, MATE-4210

Análisis complejo

Taller 3

Teorema de Cauchy y sus corolarios.

Fecha de entrega: 10 de febrero de 2016

---

1. (a) Calcule $\oint_{|z-1|=2} z^n \sin(z)\,\mathrm{d}z$ para $n \in \mathbb{Z}$.

   (b) Para $n \in \mathbb{N}_0$ demuestre que

$$\int_{|z+2\mathrm{i}|=3} \frac{1}{(z^2+\pi^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{-(2n)!}{(n!)^2}\,(2\pi)^{-2n}.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera. Suponga que existen $M, r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| < M|z|^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \geq r$. Muestre que f es un polinomio de grado a lo más n.

   Observe que el caso $n = 0$ es el teorema de Liouville.

3. Sea f una función entera y sea $\xi = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$ para un $n \in \mathbb{N}$. Suponga que $f(\xi z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que existe una función entera g tal que $f(z) = g(z^n)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera.

   (a) Muestre que el rango de f es denso en $\mathbb{C}$ o f es constante.

   (b) Suponga que $\mathrm{Re}(f)$ es acotada. Demuestre que f es constante.