Análisis complejo

Taller 2

Series de potencias.

Fecha de entrega: 03 de febrero de 2016

---

1. Sean $w, z \in \mathbb{C}$ con $\overline{z}w \neq 1$. Demuestre:
   (a) Si $|z| < 1$ y $|w| < 1$, entonces $\left|\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| < 1$.
   (b) Si $|z| = 1$ o $|w| = 1$, entonces $\left|\dfrac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| = 1$.

2. Sea $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $w \in \mathbb{D}$. Defina $F(z) := \frac{w-z}{1-\overline{w}z}$ para $z \in \mathbb{C}$ con $\overline{w}z \neq 1$. Demuestre:
   (a) F es holomorfa, $F(0) = w$, $F(w) = 0$ y la imagen de $F|_{\mathbb{D}}$ está contenida en $\mathbb{D}$.
   (b) $|F(z)| = 1$ si $|z| = 1$.
   (c) $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es biyectiva.

3. Demuestre que
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ no converge en ningún punto del círculo unitario.
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge en cada punto del círculo unitario.
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en cada punto del círculo unitario excepto 1.

   Hint. Sumar por partes.[1]

4. Un subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ es en *progresión aritmética* si existen $a, d \in \mathbb{N}$ tal que
$$S = \{a + nd : n \in \mathbb{N}_0\}.$$
   El número d se llama *diferencia* de la progresión. Demuestre que $\mathbb{N}$ no se puede particionar en un número finito, > 1, de conjuntos en progresión aritmética con diferencias distintas. (Claramente $S = \mathbb{N}$ si $a = d = 1$.)

   Hint. Escribe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ *como suma de series según la partición de* $\mathbb{N}$ *en progresiones aritméticas.*

---

[1] Sean $(a_n)_{n=1}^{N}$ y $(b_n)_{n=1}^{N}$ sucesiones en un espacio normado y sea $B_0 := 0$ y $B_k := \sum_{n=1}^{k}$ para $k \in \{1, \dots, N\}$. Entonces $\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1}(a_{n+1} - a_n)B_n$.