Análisis complejo

Taller 1

Funciones holomorfas; exp, sin, cos.

Fecha de entrega: 27 de enero de 2016

---

1. Sea $U \subseteq C$ abierto. Demuestre que U es conexo si y solo si es camino-conexo.

2. Claramente se tiene que $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestre las siguientes propiedades de las funciones exp, sin, cos.
   (a) $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
   (b) $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (c) $|\exp(z)| = 1$ si y solo si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (e) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ y $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
   (f) $\cos z = 0$ o $\sin z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$.
   (g) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\pm\infty} |\cos(x + \mathrm{i}t)| = \infty$ y $\lim_{t\to\pm\infty} |\sin(x + \mathrm{i}t)| = \infty$. El límite es uniforme en x.

3. Determine todos los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las siguientes funciones son $\mathbb{C}$-derivables (*complex differentiable*):
   (a) $f(z) = \overline{z}$,
   (b) $f(z) = |z|$,
   (c) $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

4. (a) Sea $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Determine todas las funciones enteras f tal que $u = \mathrm{Re}(f)$.
   (b) Sea $v(x, y) = x^2 + y^2$. Determine todas las funciones enteras f tal que $u = \mathrm{Im}(f)$.
   (c) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y sean $f, g : U \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas tal que f tiene valores solo en los números reales y g tiene valores solo en $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Demuestre que f y g son constantes.

5. **Voluntario.** Demuestre que $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$. Formule y pruebe la regla de cadena para las derivadas de Wirtinger.